МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

Л. В. Курпа, А. Б. Линник, Т. Е. Щербинина

ВВЕДЕНИЕ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие для студентов
технических университетов

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета,
протокол № 1 от 07.06.2013

Харьков
НТУ «ХПИ»
2014

УДК 517.5
ББК 22.1
К 93

Рецензенты:
Т.И. Шейко, д-р тех. наук, профессор, Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, г. Харьков;
Н.Д. Сизова, д-р физ.-мат. наук, профессор, Харьковский национальный университет строительства и архитектуры, г. Харьков.

Навчальний посібник містить теоретичний матеріал з базових розділів функціонального аналізу. Наведені основні визначення, формули, приклади відносно розглянутих тем. Посібник містить доведення всіх необхідних теорем, передбачених робочою програмою з функціонального аналізу.

Посібник розрахований на студентів інженерно-фізичного факультету денної форми навчання.

Курпа Л.В.

К93 Вступ до функціонального аналізу / Л.В. Курпа, А.Б. Линник, Т.Е. Щербинина. Введение в функциональный анализ : учеб. пособ. для студентов технических университетов. – Х. : НТУ «ХПІ», 2014 – 73 с. − Рос. мовою.

ISBN

Учебное пособие содержит теоретический материал по базовым разделам функционального анализа. Приведены основные определения, формулы, примеры, касающиеся рассмотренных тем. Пособие содержит доказательство всех необходимых теорем, предусмотренных программой по функциональному анализу.

Пособие предназначено для студентов инженерно-физического факультета дневной формы обучения.

Ил. 6. Библиогр. 7 назв.

УДК 517.5
ББК 22.1

ISBN

© Курпа Л.В., 2014 р.
© Линник А.Б., 2014 р.
© Щербинина Т.Е. 2014 р.

Введение

Сущность функционального анализа состоит в том, что ряд понятий и методов из элементарных глав математического анализа (и смежных областей алгебры и геометрии) переносятся на объекты более общей и более сложной природы. Обобщение основных понятий математического анализа стало возможным потому, что в процессе развития различных его ветвей обнаружилось много общего в понятиях и методах, которыми там пользуются. Например, определение функции (одной или нескольких переменных), экстремума функции и условия его существования в дифференциальном исчислении аналогичны определению функционала, экстремума функционала и условиям его существования в вариационном исчислении.

Обобщение основных понятий анализа позволяет подходить с единой точки зрения к вопросам, ранее рассматривавшихся изолированно, устанавливать связи и проводить аналогии между, казалось бы, далекими математическими теориями. Например, эти аналогии четко просматриваются между теорией линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и теорией систем линейных алгебраических уравнений. Позже мы увидим, что эти аналогии распространяются и на теорию интегральных уравнений.

Обобщение геометрических понятий, начавшееся открытием Лобачевским неевклидовой геометрии, создание геометрии n-мерного пространства позволило геометрически толковать функции многих переменных как образы многомерной геометрии. Замечательный пример глубокой аналогии между понятиями анализа и геометрии дает теория разложения по ортогональным системам функций. Эти системы во многом сходны с системами ортогональных векторов евклидова пространства, что подчеркнуто их названием. Разложению вектора по осям соответствует разложение функции в ряд Фурье, теореме Пифагора соответствует теорема Парсеваля-Стеклова и т.д.

Одновременно с обобщением геометрических понятий происходил процесс обобщения алгебраических понятий. Прежде всего, алгебраические операции над числами переносились на объекты более широкой природы (матрицы, операторы и т.д.). В связи с применением алгебраических понятий к анализу начинают рассматриваться алгебраические образования, в которых введен предельный переход. С другой стороны, все более широко начинает использоваться тот факт, что операции анализа являются предельными для алгебраических операций.

Одним из основных понятий математического анализа является понятие функции. Определение функциональной зависимости в математическом анализе формулируется следующим образом: пусть X и Y – два множества вещественных чисел. Если каждому числу $x \in X$ по некоторому правилу (закону) ставится в соответствие единственное число $y \in Y$, то говорят, что на множестве X определена однозначная ***функция*** $y = f(x)$, область значений которой расположена во множестве Y. Множество X называется областью определения функции. Если не накладывать ограничений на структуру множеств X и Y (т.е. не рассматривать их как множества действительных чисел, а понимать под X и Y множества произвольной структуры), то можно прийти к более общему определению функциональной зависимости, с которым мы сталкивались в курсе линейной алгебры, вариационном исчислении, при изучении функций комплексного переменного, функций многих переменных. А именно, это определение можно сформулировать так: пусть даны два произвольных множества X и Y и дан закон (правило), согласно которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$. Будем говорить тогда, что задан ***оператор*** $y = f(x)$ ($y = Ax$), определенный на множестве X с областью значений во множестве Y (или ***отображение*** множества X на множество Y). В том частном случае, когда значения оператора являются вещественными, оператор будем называть ***функционалом.*** Относительно свойств операторов, определенных таким образом (весьма общим), почти ничего нельзя сказать. Поэтому наряду с понятием функциональной зависимости в анализе вводится понятие предела и непрерывности. Множество, в котором тем или иным способом определено понятие предела последовательности элементов, называется пространством. Пространства, элементами которых являются функции или числовые последовательности, называются функциональными пространствами. Изучение некоторых классов операторов, определенных в функциональных пространствах, и составляет основное содержание функционального анализа.

Глава 1. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

1.1. Определение и примеры метрических пространств

В математическом анализе фундаментальным является понятие предела. Прежде всего мы встречаемся с понятием предела последовательности вещественных чисел. Это понятие непосредственно обобщается на последовательности комплексных чисел и n-мерных векторов, затем для последовательностей функций, зависящих от одной действительной переменной или нескольких, для последовательностей функций, зависящих от комплексной переменной. При этом для функций мы имеем ряд понятий сходимости: простой (неравномерной), равномерной, в среднем и т.д.

Все эти понятия сходимости имеют большей частью то общее, что сходимость последовательности элементов x_n (являющихся числами, векторами или функциями) к элементу x означает неограниченное «***сближение***» x_n и x, неограниченное уменьшение «***расстояния***» между этими элементами при неограниченном увеличении номера n. И в зависимости от того, как мы понимаем расстояние между элементами x_n и x, мы получаем различные типы сходимости. Но тогда представляется целесообразным для некоторых множеств элементов дать общее определение расстояния между элементами, которое охватывало бы рассмотренные частные случаи, а затем с помощью этого расстояния ввести на множестве понятие предельного перехода и превратить это множество в пространство.

Определение. Множество X называется ***метрическим пространством***, если каждой паре его элементов x и y поставлено в соответствие неотрицательное вещественное число $\rho(x, y)$, удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам):

1) $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$ (аксиома тождества);
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии);
3) $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (аксиома треугольника).

Приведем некоторые примеры метрических пространств.

1. Числовая прямая R^1

Множество действительных чисел с расстоянием $\rho(x, y) = |x - y|$ образует метрическое пространство R^1. Действительно,

1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\rho(x, y) = |x - y| = |y - x| = \rho(y, x)$;

3) $\rho(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \le |x - y| + |y - z| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

2. Евклидово пространство E_n

Множество упорядоченных групп из n действительных чисел (т.е. n-мерное евклидово пространство E_n) $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ с расстоянием $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2}$ называется n-мерным арифметическим евклидовым пространством R^n. Аксиомы 1 и 2 очевидны. Проверим выполнение третьей аксиомы. Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, тогда аксиома треугольника записывается в виде

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k - x_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k)^2} .$$

Полагая $y_k - x_k = a_k$, а $z_k - y_k = b_k$, получаем $z_k - x_k = a_k + b_k$ и неравенство принимает вид

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} .$$

Справедливость последнего неравенства следует из известного неравенства Коши – Буняковского $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2$ (см. приложение 1).

Действительно, в силу этого неравенства имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right)^2,$$

откуда и следует выполнение рассматриваемой аксиомы треугольника.

3. Пространство R_1^n

Это пространство представляет собой то же самое множество упорядоченных групп из n действительных чисел $x=(x_1, x_2,...,x_n)$, но расстояние определяется в нем формулой $\rho(x, y)=\sum_{k=1}^{n}|x_k - y_k|$. Справедливость аксиом (1–3) здесь очевидна.

4. Пространство m ограниченных числовых последовательностей

Пусть X – множество ограниченных числовых последовательностей $x=\{\xi_1, \xi_2,\cdots, \xi_n,\cdots\}$. Это значит, что для каждого x существует такая константа K_x, что $|\xi_i| \le K_x$ для всех $i \in N$. Пусть $x=\{\xi_i\} \in X$, $y=\{\eta_i\} \in X$, $z=\{\zeta_i\} \in X$. Введем расстояние равенством

$$\rho(x, y)=\sup_{i \in N}|\xi_i - \eta_i|.$$

Аксиомы 1 и 2 очевидны, проверки требует лишь аксиома треугольника.

$$|\xi_i - \varsigma_i| \le |\xi_i - \eta_i| + |\eta_i - \varsigma_i| \le \sup_i|\xi_i - \eta_i| + \sup_i|\eta_i - \varsigma_i| = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Следовательно, и

$$\sup_i|\xi_i - \varsigma_i| = \rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Такое пространство называется пространством m ограниченных числовых последовательностей.

5. Пространство c сходящихся числовых последовательностей

Пусть X – множество сходящихся числовых последовательностей $x=\{\xi_1, \xi_2,...,\xi_n,...\}$, причем существует $\lim_{i \to \infty} \xi_i = \xi$. Пусть $x=\{\xi_1, \xi_2,...,\xi_n,...\}$, $y=\{\eta_1, \eta_2,...,\eta_n,...\}$. Введем метрику

$$\rho(x, y)=\sup_i|\xi_i - \eta_i|.$$

Полученное пространство называется пространством c. Очевидно, что пространство c является подпространством пространства ограниченных числовых последовательностей m. Отсюда следует выполнение аксиом метрики в этом пространстве.

6. Пространство непрерывных функций $C_{[a,b]}$

Это пространство представляет собой множество всех непрерывных действительных функций, определенных на сегменте $[a, b]$ с расстоянием

$$\rho(x, y)=\max_{a \le t \le b}|x(t) - y(t)|.$$

Проверим выполнение аксиом метрики. То, что $\rho(x, y) \geq 0$ и $\rho(x, y) = 0$ лишь в том случае, если $x(t) \equiv y(t)$, а также то, что $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, очевидно. Остается проверить аксиому треугольника.

Для любого $t \in [a, b]$ имеем

$$|x(t) - z(t)| = |(x(t) - y(t)) + (y(t) - z(t))| \leq |x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)| \leq$$
$$\leq \max_t |x(t) - y(t)| + \max_t |y(t) - z(t)| = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Так как функция, стоящая под знаком модуля в левой части неравенства, является непрерывной на $[a, b]$, то она достигает на нем своего наибольшего значения. Поэтому последнее неравенство будет справедливым и для $\max_t |x(t) - z(t)| = \rho(x, z)$. Таким образом, аксиома треугольника доказана.

7. Пространство M ограниченных вещественных функций

Рассмотрим множество всех ограниченных функций $x(t)$ вещественной переменной t, определенных на сегменте $[a, b]$. Введем метрику, полагая

$$\rho(x, y) = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|.$$

Можно показать, что все аксиомы метрики выполняются. Множество всех вещественных ограниченных функций с такой метрикой называется пространством M.

8. Пространство l_2

Обозначим через l_2 метрическое пространство, элементами которого являются всевозможные последовательности $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ действительных чисел, удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$ с метрикой

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2}.$$

Из элементарного неравенства $(x_k \pm y_k)^2 \leq 2(x_k^2 + y_k^2)$ следует, что $\rho(x, y)$ имеет смысл для $\forall x, y \in l_2$, т.е. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2$ сходится, если $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$

и $\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 < \infty$.

Исходное неравенство доказывается так:

$(x_k + y_k)^2 = x_k^2 + y_k^2 + 2x_k y_k$

сложим с

$(x_k - y_k)^2 = x_k^2 + y_k^2 - 2x_k y_k$,

тогда получим:

$(x_k + y_k)^2 + (x_k - y_k)^2 = 2(x_k^2 + y_k^2) \Rightarrow (x_k \pm y_k)^2 \le 2(x_k^2 + y_k^2)$.

Покажем теперь, что функция $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2}$ удовлетворяет аксиомам 1–3. Аксиомы 1 и 2 очевидны, а аксиома 3 принимает здесь вид

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (z_k - x_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (z_k - y_k)^2}\ .$$

Каждый из рядов здесь сходится. С другой стороны, при каждом n справедливо неравенство (см. доказательство аксиомы 3 в E_n)

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k - x_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k)^2}\ ,$$

переходя в нем к пределу $n \to \infty$, получим требуемое.

9. Пространство R_p^n

Множество упорядоченных групп из n действительных чисел с метрикой

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $p \ge 1$ – некоторое фиксированное действительное число, представляет собой метрическое пространство, которое обозначается R_p^n. Справедливость аксиом (1–2) очевидна.

Аксиома треугольника в пространстве R_p^n имеет вид:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left|z_k-x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}\left|y_k-x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}\left|z_k-y_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Положив $y_k - x_k = a_k, \quad z_k - y_k = b_k$, получим:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left|a_k+b_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}\left|a_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}\left|b_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

что справедливо, так как это неравенство Минковского (доказательство приведено в приложении 1).

10. Пространство l_p

Рассмотрим пространство, элементами которого являются всевозможные последовательности действительных чисел $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, такие, что $\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p \le \infty$, где $p \ge 1$ – некоторое фиксированное действительное число, а расстояние определяется формулой

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|y_k - x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Это метрическое пространство обозначается l_p. В силу неравенства Минковского имеем при любом $n \in N$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left|y_k-x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}\left|y_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Так как по предположению ряды $\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\left|y_k\right|^p$ сходятся, то, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|y_k-x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|y_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \infty,$$

откуда следует, что $\rho(x, y)$ имеет смысл для $\forall\, x, y \in l_p$.

Аксиома треугольника имеет вид:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|z_k-x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|y_k-x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|z_k-y_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Каждый из рядов здесь сходится, и при каждом n справедливо неравенство (см. доказательство аксиомы 3 в R_p^n)

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left|z_k-x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}\left|y_k-x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}\left|z_k-y_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

переходя в нем к пределу при $n\to\infty$, получим требуемое.

11. Пространство $C_{2[a,\,b]}$

Пространство $C_{2[a,\,b]}$ – пространство непрерывных функций, определенных на $[a,b]$ с квадратичной метрикой $\rho(x,y)=\left(\int_a^b (x(t)-y(t))^2\,dt\right)^{1/2}$.

Здесь аксиомы 1 и 2 опять-таки очевидны, а аксиома треугольника непосредственно вытекает из интегральной формы неравенства Коши – Буняковского (см. приложение 1)

$$\int_a^b |x(t)y(t)|\,dt \le \left(\int_a^b x^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b y^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Действительно,

$$\int_a^b (x(t)-z(t))^2\,dt = \int_a^b [x(t)-y(t)+y(t)-z(t)]^2\,dt = \int_a^b [(x-y)^2+2(x-y)(y-z)+$$

$$+(y-z)^2]\,dt \le \int_a^b (x-y)^2\,dt + \int_a^b (y-z)^2\,dt + 2\sqrt{\int_a^b (x-y)^2\,dt}\cdot\sqrt{\int_a^b (y-z)^2\,dt} =$$

$$=\left(\sqrt{\int_a^b (x-y)^2\,dt}+\sqrt{\int_a^b (y-z)^2\,dt}\right)^2.$$

Возвращаясь к обозначению метрики, имеем:

$$\rho^2(x,z)\le(\rho(x,y)+\rho(y,z))^2 \Rightarrow \rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z),$$

что и требовалось доказать.

1.2. Сходимость в метрическом пространстве

Пусть X – произвольное метрическое пространство.

Определение. Элемент $a \in X$ называется ***пределом последовательности*** $\{x_n\} \subset X$, если $\rho(x_n, a) \to 0$ при $n \to \infty$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon): \forall\, n > N \Rightarrow \rho(x_n, a) < \varepsilon .$$

Из определения предела следуют такие теоремы.

Теорема 1. Если последовательность $\{x_n\} \subset X$ имеет предел, то он – единственный.

Доказательство (от противного). Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. На основании аксиомы треугольника для любого $n \in N$ имеем

$$\rho(a, b) \le \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{, т.е.}$$

$$0 \le \rho(a, b) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \rho(a, b) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b .$$

Теорема 2. Если последовательность имеет предел, то и всякая ее подпоследовательность сходится к тому же пределу.

Доказательство. Выделим из $\{x_n\}$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Так как $\{x_{n_k}\}$ – подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, то

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists\, N_1 = N_1(\varepsilon_1): \forall\, n > N_1, n_k > N_1 \Rightarrow \rho(x_n,\ x_{n_k}) < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} .$$

С другой стороны, так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists\, N_2 = N_2(\varepsilon_2): \forall\, n > N_2 \Rightarrow \rho(x_n,\ a) < \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} .$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$, тогда по аксиоме треугольника получим $\rho(x_{n_k},\ a) \le \rho(x_{n_k},\ x_n) + \rho(x_n,\ a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Отсюда и следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a$.

Выясним, что означает сходимость в различных метрических пространствах.

Пример 1

Пусть $X = C_{[a,\,b]}$ с метрикой $\rho(x, y) = \max\limits_{a \le t \le b} |y(t) - x(t)|$.

Если $\{x_n(t)\} \subset C_{[a,\,b]}$ сходится к $x_0(t) \subset C_{[a,\,b]}$, то $\rho(x_0,\ x_n) = \max\limits_{a \le t \le b} |x_n(t) - x_0(t)| \to 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) : \forall\, n > N \Rightarrow \max_{a \le t \le b} |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon .$$

Полученное условие эквивалентно условию $|x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon$ $\forall n > N(\varepsilon)$ $\forall t \in [a, b]$. А это условие равномерной сходимости последовательности $\{x_n(t)\}$ к $x_0(t)$. Таким образом, сходимость в пространстве $C_{[a,\,b]}$ есть ***равномерная сходимость*** функциональной последовательности.

Пример 2

Пусть теперь $X = E_n$ с метрикой $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$. Если $x^{(k)} \to x$ при $k \to \infty$, где $x^{(k)} = \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)}\}$ и $x = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, то $\rho\left(x^{(k)},\ x\right) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i - x_i^{(k)}\right)^2} \to 0$ при $k \to \infty$. Но это возможно тогда и только тогда, когда $x_i^{(k)} \to x_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$ при $k \to \infty$. Отсюда следует, что сходимость в E_n есть сходимость координат точек последовательности к соответствующим координатам точки-предела, т.е. так называемая ***покоординатная сходимость.***

1.3. Элементы топологии метрического пространства

Определение. ***Открытым шаром*** $B(x_0, r)$ в метрическом пространстве X будем называть совокупность точек $x \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x_0) < r$. Точка x_0 называется центром этого шара, число r его радиусом.

Открытый шар радиуса ε с центром в точке x_0 называется ε***-окрестностью точки*** x_0 и обозначается символом $O_\varepsilon(x_0)$.

Определение. ***Замкнутым шаром*** $B[x_0, r]$ называется совокупность точек $x \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x,\ x_0) \le r$.

Пример 1

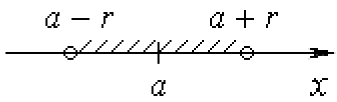

Рисунок 1

В пространстве R_1 с метрикой $\rho(x,\ a) = |x - a|$ шар с центром в точке $x = a$ и радиусом r представляет собой множество точек, находящихся от точки a на расстоянии, меньшем r, т.е. интервал прямой $(a - r, a + r)$ (рис. 1).

Пример 2

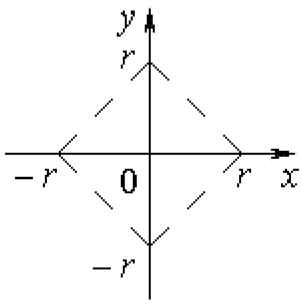

Рисунок 2

В пространстве R_1^2 с метрикой $\rho(x,\ y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$ шар $B(a, r)$, где $a = (a_1, a_2)$, определяется неравенством $|a_1 - x_1| + |a_2 - x_2| < r$. В частности, если $a = (0, 0)$, то шар $B(a, r): |x_1| + |x_2| < r$ представляет собой множество точек, расположенных внутри ромба, с центром в начале координат и отсекающем на осях отрезки величиной r (рис. 2).

Пример 3

В евклидовом пространстве E_2 с метрикой $\rho(x,\ y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$ замкнутый шар с центром в точке $a(a_1, a_2)$ определяется неравенством $(a_1 - x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2 \le r^2$, т.е. представляет собой круг. Аналогично получаем, что в пространстве E_3 это будет обычный шар.

Пример 4

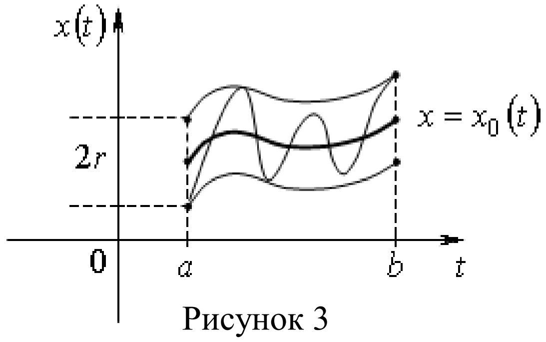

Рисунок 3

В пространстве $C_{[a,\, b]}$ всех непрерывных действительных функций, определенных на сегменте $[a, b]$ с метрикой $\rho(x, y) = \max\limits_{a \le t \le b} |y(t) - x(t)|$, шар – это множество функций со значениями в области, изображенной на рис. 3.

Определение. Множество $M \subset X$ называется ***ограниченным***, если оно заключено внутри некоторого шара (открытого или замкнутого).

Определение. Точка x метрического пространства X называется ***предельной точкой*** множества $M \subset X$, если любая ее окрестность содержит бесконечно много точек из M.

Предельная точка может принадлежать множеству M, а может и не принадлежать ему. Например, если M – множество всех рациональных чисел из отрезка $[0, 2]$, то точка $\sqrt{2}$ – предельная точка для M, но не принадлежит M.

Дадим второе, равносильное определение предельной точки.

Определение. Точка x метрического пространства X называется ***предельной точкой*** множества $M \subset X$, если существует последовательность $\{x_n\} \subset X$ ($x_n \neq x \ \forall\, n \in N$), такая что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Определение. Точка $x \in M$ называется ***изолированной точкой*** множества $M \subset X$, если в достаточно малой ее окрестности $O_\varepsilon(x)$ нет точек из M, отличных от x.

Определение. Точка $x \in X$ называется ***точкой прикосновения*** множества $M \subset X$, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку из M.

Можно доказать, что точка прикосновения множества M есть либо предельная, либо изолированная точка этого множества.

Определение. Совокупность всех точек прикосновения множества M называется ***замыканием*** этого множества и обозначается $[M]$.

Таким образом, замыкание множества состоит из точек трех типов:

- изолированные точки множества M;
- предельные точки, принадлежащие M;
- предельные точки, не принадлежащие M.

Исходя из этого замыкание $[M]$ получается присоединением к M всех его предельных точек.

Теорема. Замыкание множества обладает следующими свойствами:

1) $M \subset [M]$;

2) $[[M]] = [M]$;

3) если $M_1 \subset M_2$, то $[M_1] \subset [M_2]$;

4) $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]$.

Доказательство

1. Свойство $M \subset [M]$ очевидно, так как всякая точка, принадлежащая множеству *M*, является для *M* точкой прикосновения.

2. Пусть $x \in [[M]]$, тогда по определению в $\forall O_\varepsilon(x) \exists x_1 \in [M]$. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon - \rho(x, x_1)$ и рассмотрим шар $O_{\varepsilon_1}(x_1)$. Для $\forall z \in O_{\varepsilon_1}(x_1)$ $\rho(z, x_1) < \varepsilon_1$ и так как $\rho(x, x_1) = \varepsilon - \varepsilon_1$, то по аксиоме треугольника $\rho(x, z) < \rho(x, x_1) + \rho(x_1, z) < \varepsilon_1 + (\varepsilon - \varepsilon_1) = \varepsilon$, т.е. $z \in O_\varepsilon(x)$. Отсюда следует, что шар $O_{\varepsilon_1}(x_1)$ целиком лежит внутри шара $O_\varepsilon(x)$. Так как $x_1 \in [M]$, то в $O_{\varepsilon_1}(x_1)$ найдется хотя бы одна точка $x_2 \in M$. Но тогда $x_2 \in O_\varepsilon(x)$. Так как $O_\varepsilon(x)$ – произвольная окрестность точки *x*, то $x \in M$, и следовательно, $[[M]] = [M]$.

3. Пусть $x \in M_1 \Rightarrow x \in [M_1]$ (по 1-му свойству). Далее, если $x \in M_1$, то так как $M_1 \subset M_2$, то $x \in M_2 \Rightarrow x \in [M_2]$. Таким образом, любой элемент $x \in [M_1]$ содержится в $[M_2]$. Поэтому $[M_1] \subset [M_2]$.

4. Если $x \in [M_1 \cup M_2]$, то *x* содержится, по крайней мере, в одном из множеств $[M_1]$ или $[M_2]$, т.е. $[M_1 \cup M_2] \subset ([M_1] \cup [M_2])$. С другой стороны, $M_1 \subset M_1 \cup M_2$ и $M_2 \subset M_1 \cup M_2$, и из 3-го свойства получаем, что $[M_1] \subset [M_1 \cup M_2]$, $[M_2] \subset [M_1 \cup M_2]$, и $([M_1] \cup [M_2]) \subset [M_1 \cup M_2]$. Сопоставляя, получаем доказываемое.

Определение. Множество $M \subset X$ называется ***замкнутым***, если оно совпадает со своим замыканием. Или, другими словами, если множество содержит все свои предельные точки, то оно называется замкнутым.

Всякий отрезок $[a, b]$ числовой прямой есть замкнутое множество. Всякий замкнутый шар является замкнутым множеством. В частности, в пространстве $C_{[a, b]}$ множество функций, удовлетворяющих условию $|x(t)| \le K \ \ \forall t \in [a, b]$, является замкнутым.

Можно доказать следующих два утверждения:

1) $[M]$ – замкнутое множество;

2) $[M]$ – наименьшее замкнутое множество, содержащее M.

Определение. Точка x называется ***внутренней точкой*** множества M, если она принадлежит этому множеству вместе с некоторой своей окрестностью $O_\varepsilon(x)$.

Определение. Множество, все точки которого внутренние, называется ***открытым***.

Например, открытый шар $B(a, r)$ в любом метрическом пространстве является открытым множеством. Действительно, если $x \in B(a, r)$, то $\rho(x, a) < r$. Положим $\varepsilon = r - \rho(a, x)$, тогда $O_\varepsilon(x) \subset B(a, r)$.

Введем еще некоторые понятия, связанные с замыканием множества.

Определение. Пусть A и B – два множества в метрическом пространстве X. Множество A называется ***плотным*** в B, если $[A] \supset B$. В частности, множество A называется ***всюду плотным*** (в пространстве X), если его замыкание совпадает со всем пространством.

Определение. Пространства, в которых имеется счетное всюду плотное множество, называются ***сепарабельными.***

Примеры

1. На действительной оси множество рациональных чисел является счетным всюду плотным, т.е. числовая прямая является сепарабельным пространством.

2. В пространствах $R^n(E_n), R_1^n, R_1^\infty$ совокупность векторов с рациональными координатами является счетным всюду плотным множеством, т.е. эти пространства также являются сепарабельными.

3. В пространстве $C_{[a, b]}$ всех непрерывных действительных функций на сегменте $[a, b]$ с метрикой $\rho(x, y) = \max\limits_{a \le t \le b} |y(t) - x(t)|$ совокупность всех многочленов с рациональными коэффициентами является счетным всюду плотным множеством.

1.4. Полные метрические пространства

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства X называется ***фундаментальной*** (или сходящейся в себе), если она удовлетворяет критерию Коши, т.е. если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon .$$

Из аксиомы треугольника следует, что любая сходящаяся последовательность – фундаментальна. Действительно, если $\{x_n\} \to x$, то

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists N_1 = N_1(\varepsilon_1): \forall n > N_1 \Rightarrow \rho(x_n,\ x) < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $\rho(x_n,\ x_m) \le \rho(x_n,\ x) + \rho(x,\ x_m) < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon \ \ \forall\, n, m > N_1$.

Определение. Если в метрическом пространстве X любая фундаментальная последовательность сходится к некоторому пределу, являющемуся элементом этого же пространства, то это пространство называется ***полным.***

Пример 1

Пусть X – множество рациональных чисел с метрикой $\rho(x, y) = |y - x|$, т.е. метрическое пространство. Рассмотрим в нем последовательность $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{3^n}\right\}$. Эта последовательность сходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0$, и ее предел принадлежит пространству.

Возьмем другую последовательность: $\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$. Эта последовательность является фундаментальной, так как $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Однако ее предел (число *e*) не принадлежит X, поскольку не является рациональным числом. Таким образом, метрическое пространство рациональных чисел не является полным.

Пример 2

Пусть X – пространство многочленов $P(t)$ на сегменте $[a, b]$ с метрикой $\rho(P,\ Q) = \max\limits_{t\in[a,\, b]}|P(t) - Q(t)|$. Рассмотрим последовательность $\{P_n(t)\} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$. Каждый элемент этой последовательности является многочленом вида $P_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!}$. Последовательность является фундаментальной, так как $\exists \lim\limits_{n\to\infty} P_n(t) = e^t$, однако этот предел – непрерывная функция $e^t \notin X$, т.е. пространство многочленов не является полным.

Пример 3

Рассмотрим теперь $X = E_n$ с метрикой $\rho(x,\ y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}$.

Пусть $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ – фундаментальная последовательность в E_n, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon): \forall\, k, m > N(\varepsilon) \Rightarrow \rho(x^{(k)},\ x^{(m)}) < \varepsilon,$$

откуда $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i^{(k)} - x_i^{(m)}\right)^2 < \varepsilon^2$, т.е. $\left|x_i^{(k)} - x_i^{(m)}\right| < \varepsilon \quad \forall\, k, m > N(\varepsilon)$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$. Таким образом, последовательности $\left\{x_i^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальны в R^1 и в силу критерия Коши – сходятся. Обозначим $x_i = \lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)}$, а элемент $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда, очевидно, $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x \in E_n$, т.е. пространство E_n является полным.

Пример 4

Докажем полноту пространства $C_{[a,\,b]}$.

Пусть $\{x_n(t)\}$ – некоторая фундаментальная последовательность в $C_{[a,\,b]}$. Это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon): \forall\, n, m > N(\varepsilon) \text{ и } \forall\, t \in [a, b] \Rightarrow |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что последовательность $\{x_n(t)\}$ равномерно сходится по критерию Коши равномерной сходимости. Как известно, в этом случае ее предел $x(t)$ будет непрерывной функцией, т.е. $x(t) \in C_{[a,\,b]}$. Устремляя в предыдущем неравенстве $m \to \infty$, получим

$$|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon \text{ для } \forall t \in [a, b] \text{ и } \forall n > N(\varepsilon),$$

а это и означает, что $\{x_n(t)\}$ сходится к $x(t)$ в смысле метрики пространства $C_{[a,\,b]}$, т.е. $C_{[a,\,b]}$ – полное пространство.

Теорема о вложенных шарах. Для того чтобы метрическое пространство X было полным, необходимо и достаточно, чтобы в нем всякая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела непустое пересечение.

Доказательство

Необходимость. Пусть пространство X – полное и пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ – последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров. Пусть r_n – радиус шара B_n, а x_n – его центр. Так как при $m > n$ $\rho(x_n, x_m) < r_n$, а по условию теоремы $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, то последовательность $\{x_n\}$ – фундаментальна. В силу того, что пространство X – полное, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $x \in X$. Шар B_n содержит все точки последовательности $\{x_n\}$ за исключением, быть может, точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Но так как B_n – замкнутый шар, то его предельная точка $x \in B_n$, причем это справедливо для $\forall n$, т.е. $x \in \bigcap\limits_n B_n$.

Достаточность. Пусть $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность, тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): \forall n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Пусть $\varepsilon = \dfrac{1}{2^k}$, а номер n_k такой, что $\rho(x_{n_k + p}, x_{n_k}) < \varepsilon$ для $\forall\, p > 0$.

Пусть B_k – замкнутый шар радиуса $r_k = \dfrac{1}{2^{k-1}}$ с центром в точке x_{n_k}; B_{k+1} – замкнутый шар радиуса $r_{k+1} = \dfrac{1}{2^k}$ с центром в точке $x_{n_{k+1}}$ соответственно. Если точка $x \in B_{k+1}$, то

$$\rho(x, x_{n_k}) \le \rho(x, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < r_{k+1} + \varepsilon = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}},$$

т.е. $x \in B_k$, а значит, $B_{k+1} \subset B_k$. При этом $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{2^{k-1}} = 0$, т.е. $\{B_k\}$ – последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю. По условию теоремы существует точка $x_0 \in \bigcap\limits_k B_k$. При этом $x_{n_k}, x_0 \in B_k$ и $\rho(x_0, x_{n_k}) < \dfrac{1}{2^{k-1}}$, откуда $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Но если фундаментальная последовательность содержит сходящуюся к x_0

подпоследовательность, то она сама сходится к тому же пределу, т.е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, и $x_0 \in X$, т.е. по определению про-

странство X – полное.

1.5. Принцип сжатых отображений

Определение. Пусть X – метрическое пространство. Отображение A пространства X в себя называется ***сжатым***, если $\exists \alpha < 1$:

$$\rho(Ax,\ Ay) \le \alpha \cdot \rho(x,\ y) \quad \text{для } \forall\, x, y \in X.$$

Всякое сжатое отображение непрерывно, т.е. если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, то $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = Ax$. Действительно, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, то $\rho(x_n,\ x) \to 0$, а значит, и $\rho(Ax_n,\ Ax) \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = Ax$.

Определение. Точка x_0 называется ***неподвижной точкой*** отображения A, если $Ax_0 = x_0$.

Теорема. Всякое сжатое отображение, определенное в полном метрическом пространстве X, имеет одну и только одну неподвижную точку.

Доказательство. Пусть x_0 – произвольная точка в X. Обозначим $Ax_0 = x_1$, $Ax_1 = A(Ax_0) = A^2 x_0 = x_2, \ldots,$ $Ax_{n-1} = A^n x_0 = x_n$. Покажем, что построенная последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная.

По определению сжатого отображения $\rho(x_{n+1},\ x_n) = \rho(Ax_n,\ Ax_{n-1}) \le \alpha \cdot \rho(x_n,\ x_{n-1})$ для $\forall n$. Тогда

$\rho(x_n,\ x_{n-1}) \le \alpha \cdot \rho(x_{n-1},\ x_{n-2}),\ \Rightarrow$

$\rho(x_{n+1},\ x_n) \le \alpha^2 \cdot \rho(x_{n-1},\ x_{n-2}),$

\- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$\rho(x_{n+1},\ x_n) \le \alpha^n \cdot \rho(x_1,\ x_0).$

Оценим $\rho(x_m,\ x_n)$, считая $m \ge n$. По аксиоме треугольника

$$\rho(x_m,\ x_n) \le \rho(x_m,\ x_{m-1}) + \rho(x_{m-1},\ x_{m-2}) + \ldots + \rho(x_{n+1},\ x_n) \le$$

$$\le \alpha^{m-1}\rho(x_1,\ x_0) + \alpha^{m-2}\rho(x_1,\ x_0) + \ldots + \alpha^n \rho(x_1,\ x_0) =$$

$$= \left(\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{m-1}\right)\rho(x_1,\ x_0) = \alpha^n\left(1 + \alpha + \ldots + \alpha^{m-1-n}\right)\rho(x_1,\ x_0) \le$$

$$\leq \alpha^n \left(1+\alpha+\ldots+\alpha^{m-1-n}+\ldots\right)\rho(x_1,\ x_0)=\alpha^n \frac{1}{1-\alpha}\rho(x_1,\ x_0).$$

Так как $\alpha<1$, то при достаточно большом n правая часть может быть сколь угодно малой, т.е. $\rho(x_m,\ x_n)\to 0$ и последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной. При этом в силу полноты пространства X $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $x\in X$. А так как отображение A непрерывно, то $Ax = A\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = x$. Таким образом, $Ax=x$, т.е. неподвижная точка существует.

Предположим, что таких точек две, т.е. $Ax=x$ и $Ay=y$. Тогда по определению сжатого отображения $\rho(Ax,\ Ay)\leq\alpha\cdot\rho(x,\ y)$. Но $\rho(Ax,\ Ay)=\rho(x,\ y)$, и отсюда $\rho(x,\ y)\leq\alpha\cdot\rho(x,\ y)$ или $(1-\alpha)\rho(x,\ y)\leq 0$. Множитель $(1-\alpha)>0$, а метрика неотрицательна по определению, следовательно, $\rho(x,\ y)=0$ и $x=y$, т.е. неподвижная точка единственна.

1.6. Применение принципа сжатых отображений

1. Решение алгебраических уравнений

Пусть требуется решить уравнение $x=f(x)$, где $f(x)$ – непрерывная функция, определенная на $[a,\ b]$. Пусть $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица, т.е. $|f(x_2)-f(x_1)|\leq k|x_2-x_1|$, где $k<1$. Тогда $Ax=f(x)$ отображает сегмент $[a,\ b]$ в себя.

В пространстве $C_{[a,\,b]}$ $\rho(y_1,\ y_2)=\max\limits_{a\leq x\leq b}|y_2(x)-y_1(x)|$. Если положить $y_1=Ax_1=f(x_1)$ и $y_2=Ax_2=f(x_2)$, то $\rho(Ax_1,\ Ax_2)= =\max\limits_{a\leq x\leq b}|f(x_2)-f(x_1)|\leq k\max\limits_{a\leq x\leq b}|x_2-x_1|$. Таким образом, $\rho(Ax_1,\ Ax_2)\leq k\cdot\rho(x_1,\ x_2)$, где $k<1$, $\Rightarrow Ax=f(x)$ – сжатое отображение. Согласно принципу существует единственная точка, т.е. существует единственное решение уравнения $Ax=f(x)$, т.е. $x=f(x)$, причем последовательность x_0, $x_1=f(x_0)$, $x_2=f(x_1),\ldots$ сходится к этому единственному решению.

Решение уравнения $Ax=x$ или $f(x)=x$ может быть получено методом последовательных приближений, начиная с произвольной точки $x_0\in[a,b]$.

Отметим, что из теоремы Лагранжа следует, что $\forall\, x_1, x_2 \in [a, b]$ $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\cdot(x_2 - x_1)$, где $c \in [x_1,\ x_2]$. Благодаря этому, условие сжатости, в частности, выполнено, если $|f'(x)| \le k < 1$ на $[a, b]$.

Применим этот принцип для решения более общего класса уравнений вида $F(x) = 0$. Пусть $F(a) < 0$, $F(b) > 0$ и на $[a, b]$ $0 < k_1 \le F'(x) \le k_2$. Введем функцию $f(x) = x - \lambda F(x)$, тогда решение уравнения $F(x) = 0$ равносильно решению рассмотренного выше уравнения $x = f(x)$. Так как $f'(x) = 1 - \lambda F'(x)$, то получаем $1 - \lambda k_2 \le f'(x) \le 1 - \lambda k_1$. Значение λ подбирается из условия сжатости и далее для решения уравнения $x = f(x)$ применяется метод последовательных приближений.

2. Доказательство теоремы существования и единственности решения задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши $\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ для дифференциального уравнения 1-го порядка. Докажем, что на некотором сегменте $|x - x_0| \le d$ существует и притом единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальному условию.

Сначала покажем, что задача Коши эквивалентна уравнению

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt\,.$$

Действительно:

$$\frac{dy(x)}{dx} = y' = \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt = f(x, y(x)), \text{ т.е. } y' = f(x, y).$$

При этом $y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, \varphi(t))dt = y_0$, т.е. $y(x_0) = y_0$.

Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой плоской области D, содержащей точку (x_0, y_0), и удовлетворяет в этой области условию Липшица по y, т.е. $\forall\ (x, y_1),\ (x, y_2) \in D$ выполняется

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \le K \cdot |y_2 - y_1|,$$

где $K = \text{const}$.

Так как функция $f(x, y)$ непрерывна в D, а следовательно, и в любой замкнутой области $D' \subset D$ (D' содержит точку (x_0, y_0)). По теореме Вейерштрасса $f(x, y)$ ограничена в области D', т.е. $|f(x, y)| \le M$. Покажем, что на некотором сегменте $|x - x_0| \le d$ существует и притом единственное решение задачи Коши.

Подберём $d > 0$ таким образом, чтобы:

1) $(x, y) \in D'$, если $|x - x_0| \le d$, $|y - y_0| \le M \cdot d$;

2) $K \cdot d < 1$ (K – константа Липшица).

Рассмотрим пространство C^* – пространство непрерывных функций $y(x)$, определённых на сегменте $|x - x_0| \le d$ и таких, что $|y(x) - y_0| \le M \cdot d$ с метрикой $\rho(y_1,\ y_2) = \max\limits_{|x - x_0| \le d} |y_2(x) - y_1(x)|$.

Пространство C^* является замкнутым подпространством полного метрического пространства $C_{[x_0 - d,\ x_0 + d]}$, следовательно, тоже полное. Рассмотрим в C^* отображение A, определяемое формулой

$$Ay(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \quad \forall x \in |x - x_0| \le d.$$

Покажем, что отображение A действует из C^* в C^*, т.е. выполняется условие $|Ay(x) - y_0| \le M \cdot d$. Действительно,

$$|Ay(x) - y_0| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \right| \le \int\limits_{x_0}^{x} |f(t, y(t))| dt \le M|x - x_0| \le M \cdot d.$$

Теперь докажем, что отображение A – сжатое. Имеем:

$$\rho(Ay_1,\ Ay_2) = \max_{|x - x_0| \le d} |Ay_2(x) - Ay_1(x)| = \max_{|x - x_0| \le d} \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_2(t)) - \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt \right| \le$$

$$\le \max_{|x - x_0| \le d} \int\limits_{x_0}^{x} |f(t, y_2(t)) - f(t, y_1(t))| dt \le \max_{|x - x_0| \le d} K \int\limits_{x_0}^{x} |y_2(t) - y_1(t)| dt \le$$

$$\le K \cdot \max_{|x - x_0| \le d} |y_2(x) - y_1(x)| \cdot d \le Kd \cdot \rho(y_1,\ y_2).$$

Так как $Kd < 1$, то получено, что $\rho(Ay_1, Ay_2) \le \alpha \rho(y_1,\ y_2)$, где $\alpha < 1$, т.е. по определению отображение A– сжатое. По принципу сжатых отображений существует единственная неподвижная точка в пространстве C^*:

$Ay(x)=y(x)$, т.е. существует единственное решение задачи Коши $\begin{cases} y'=f(x,y), \\ y(x_0)=y_0. \end{cases}$

3. Решение интегральных уравнений.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода:

$$\varphi(t)=\lambda\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds+f(t).$$

Пусть $f(t)\in C_{[a,b]}$, ядро $K(t,s)\in C_Q$, где $Q=[a,b]\times[a,b]$, и следовательно, ограничено в этом квадрате, т.е. $\forall (t,s)\in Q \quad |K(t,s)|\le M$.

Решением уравнения будем называть всякую функцию $\varphi_0(t)\in C_{[a,b]}$, которая обращает уравнение в тождество при $t\in[a,b]$.

Очевидно, что при $\lambda=0$ уравнение имеет единственное решение $\varphi_0(t)=f(t)$.

Теорема. Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода имеет единственное непрерывное решение при $\forall\lambda : |\lambda|<\dfrac{1}{M(b-a)}$.

Доказательство. Введем оператор

$$A\varphi(t)\equiv\lambda\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds+f(t),$$

тогда решение уравнения будет эквивалентно поиску неподвижной точки оператора A. Докажем, что отображение A является сжатым. Очевидно, что A действует из полного пространства $C_{[a,b]}$ в $C_{[a,b]}$. При этом

$$\rho(A\varphi_1,\ A\varphi_2)=\max_{a\le t\le b}|A\varphi_1(t)-A\varphi_2(t)|=$$

$$=\max_{a\le t\le b}\left|\lambda\int_a^b K(t,s)\varphi_1(s)ds-\lambda\int_a^b K(t,s)\varphi_2(s)ds\right|=\max_{a\le t\le b}\left|\lambda\int_a^b K(t,s)(\varphi_1(s)-\varphi_2(s))ds\right|\le$$

$$\le|\lambda|M(b-a)\max_{a\le s\le b}|\varphi_1(s)-\varphi_2(s)|=|\lambda|M(b-a)\,\rho(\varphi_1,\ \varphi_2).$$

Отсюда следует, что при $|\lambda|<\dfrac{1}{M(b-a)}$ оператор A является сжатым и уравнение имеет единственное решение. Это решение можно найти методом последовательных приближений:

$$\varphi_n(t)=\lambda\int_a^b K(t,s)\varphi_{n-1}(s)ds+f(t),\;\; n\in N,$$

где в качестве начального приближения $\varphi_0(t)$ можно взять любую непрерывную функцию. Теорема доказана.

Пример. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(t)\equiv\frac{1}{2}\int_0^1\varphi(s)ds+\sin\pi t.$$

Решение. Ядро уравнения $K(t,s)\equiv 1,\; \lambda=\frac{1}{2}$, поэтому $|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}$ и уравнение можно решить методом последовательных приближений.

Пусть $\varphi_0(t)=0$, тогда $\varphi_n(t)=\frac{1}{2}\int_0^1\varphi_{n-1}(s)ds+\sin\pi t,\;\; n\in N$.

Имеем:

$\varphi_1(t)=\sin\pi t$;

$\varphi_2(t)=\frac{1}{2}\int_0^1\sin\pi s ds+\sin\pi t=\frac{1}{\pi}+\sin\pi t$;

$\varphi_3(t)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{\pi}+\sin\pi s\right)ds+\sin\pi t=\frac{3}{2\pi}+\sin\pi t$;

$\varphi_4(t)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{3}{2\pi}+\sin\pi s\right)ds+\sin\pi t=\frac{7}{4\pi}+\sin\pi t$;

$\varphi_5(t)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{7}{4\pi}+\sin\pi s\right)ds+\sin\pi t=\frac{15}{8\pi}+\sin\pi t$ и т.д.

$\varphi_n(t)=\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-2}\pi}+\sin\pi t\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{2}{\pi}+\sin\pi t$.

Таким образом, решением уравнения является $\varphi(t)=\frac{2}{\pi}+\sin\pi t$.

Рассмотрим теперь интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода

$$\varphi(t)=\lambda\int_a^t K(t,s)\varphi(s)ds+f(t).$$

Пусть $f(t) \in C_{[a,\,b]}$, ядро $K(t,s) \in C_D$, где $D = \{t \in [a,b],\, s \in [a,t]\}$, и следовательно, ограничено в этом треугольнике, т.е. для $\forall (t,\,s) \in D$ $|K(t,\,s)| \le M$.

Утверждение. Пусть $A: X \to X$ – непрерывное отображение (X – полное метрическое пространств) и пусть при некотором n A^n является сжатым оператором. Тогда оператор A имеет единственную неподвижную точку в пространстве X.

Доказательство. Так как оператор A^n – сжатый, то он имеет единственную неподвижную точку. Обозначим ее x_0, тогда $A^n x_0 = x_0$. Далее $Ax_0 = A(A^n x_0) = A^n(Ax_0)$, т.е. Ax_0 – неподвижная точка оператора A^n и так как она единственна, то $Ax_0 = x_0$. Таким образом, существование неподвижной точки для оператора A доказано. Покажем теперь, что x_0 является единственной такой точкой. Предположим, что $\exists x_1$: $Ax_1 = x_1$, но тогда $A^n x_1 = x_1$. Это противоречит условию, что A^n имеет единственную неподвижную точку. Утверждение доказано.

Теорема. Уравнение Вольтерра имеет единственное непрерывное решение при любых значениях λ.

Доказательство

$$\rho(A\varphi_1,\, A\varphi_2) = \max_{a \le t \le b} \left| \lambda \int_a^t K(t,\,s)(\varphi_1(s) - \varphi_2(s))ds \right| \le$$
$$\le |\lambda| M(t-a) \max_{a \le s \le b} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| \le |\lambda| M(b-a)\, \rho(\varphi_1,\, \varphi_2).$$

$$\rho(A^2\varphi_1,\, A^2\varphi_2) = \max_{a \le t \le b} \left| \lambda \int_a^t K(t,\,s)(A\varphi_1(s) - A\varphi_2(s))ds \right| \le$$

$$\le |\lambda|^2 M^2 \frac{(t-a)^2}{2!}\, \rho(\varphi_1,\, \varphi_2).$$

Аналогично

$$\rho(A^n\varphi_1,\, A^n\varphi_2) \le |\lambda|^n M^n \frac{(t-a)^n}{n!}\, \rho(\varphi_1,\, \varphi_2) \le |\lambda|^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!}\, \rho(\varphi_1,\, \varphi_2).$$

При любом значении λ число n можно выбрать настолько большим, что $|\lambda|^n M^n \dfrac{(b-a)^n}{n!} < 1$ (так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$). Следовательно, оператор A^n –

сжимающий, и по доказанному утверждению уравнение Вольтерра имеет единственное решение.

Пример. Решить уравнение Вольтерра

$$\varphi(t) \equiv \int_0^t \varphi(s)ds + 1.$$

Решение. Пусть $\varphi_0(t) = 1$, тогда $\varphi_n(t) = \int_0^t \varphi_{n-1}(s)ds + 1, \;\; n \in N$. Имеем:

$$\varphi_1(t) = \int_0^t ds + 1 = 1 + t\,;$$

$$\varphi_1(t) = \int_0^t (1+s)ds + 1 = 1 + t + \frac{t^2}{2!}\text{; и т.д.}$$

$$\varphi_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^t\,.$$

Таким образом, решением уравнения является функция $\varphi(t) = e^t$.

Глава 2. ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

2.1. Линейные пространства и подпространства

Определение. Непустое множество L элементов некоторой природы называется ***действительным линейным пространством***, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. Для $\forall$ двух элементов $x, y \in L$ однозначно определен третий элемент $z \in L$, называемый их суммой, обозначаемый $x + y$.

2. Для $\forall$ числа α и $\forall\, x \in L$ однозначно определен элемент $w = \alpha x \in L$, называемый произведением элемента x на число α.

3. Указанные две операции удовлетворяют 8 аксиомам:

1) $x + y = y + x \quad \forall\, x, y \in L$ (коммутативность суммы);

2) $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall\, x, y, z \in L$ (ассоциативность суммы);

3) $\exists$ такой элемент $\theta \in L$, что $x + \theta = x \ \ \forall x \in L$ (существование нуля);

4) $\forall\, x \in L$ $\exists$ такой элемент $-x \in L$, что $x + (-x) = \theta$ (существование противоположного элемента);

5) $\exists 1 \in R \ \ 1 \cdot x = 1 \ \ \forall x \in L$ (особая роль единицы);

6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad \forall\, \alpha, \beta \in R, \ \ \forall\, x \in L$ (ассоциативность относительно числового множителя);

7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \ \ \forall\, \alpha, \beta \in R, \ \ \forall\, x \in L$ (дистрибутивность относительно суммы числовых множителей);

8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \ \ \forall \alpha \in R, \ \forall\, x, y \in L$ (дистрибутивность относительно суммы элементов).

Если же в пространстве L определено умножение на комплексные числа, то L является комплексным линейным пространством.

Введем понятие размерности линейного пространства.

Определение. Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$ называются ***линейно независимыми***, если их линейная комбинация $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ только при условии, что все $\alpha_k = 0$ $(k = \overline{1, n})$; если же хотя бы одно $\alpha_k \neq 0$, то элементы называются ***линейно зависимыми***.

В зависимости от возможного числа линейно независимых элементов пространства определяется понятие размерности и базиса пространства.

Определение. Пространство L называется n***-мерным***, если в нем существует n линейно независимых элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а любые $n+1$ элементы этого пространства линейно зависимы. Совокупность $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называется ***базисом*** пространства. Если же в L можно указать систему из любого числа линейно независимых элементов, то пространство L называется ***бесконечномерным***.

Примеры линейных пространств

1. Действительное n-мерное евклидово пространство E_n, если ввести сложение и умножение элемента на число по формулам

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

2. Пространство l_2, если операции сложения и произведения на число определены как

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots),$$

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n, \ldots).$$

3. Пространство $C_{[a,b]}$ с обычными операциями сложения функций и умножения их на числа. Роль нулевого элемента в этом пространстве играет функция, равная нулю на всем отрезке $[a, b]$.

Определение. Подмножество L_1 элементов линейного пространства L называется ***линейным***, если для $\forall$ двух элементов $x, y \in L_1$ и для $\forall$ двух чисел α, β линейная комбинация $\alpha x + \beta y \in L_1$.

Это свойство распространяется на любое конечное число слагаемых, т.е. если $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L_1$, то $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \in L_1$ для $\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Определение. Множество всех линейных комбинаций любого конечного числа элементов системы называется ***линейной оболочкой*** этой системы.

Исходя из определения, линейная оболочка системы элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ данного пространства L будет являться линейным подмножеством L_1 для исходного пространства L.

Определение. Замкнутое линейное подмножество линейного пространства L называется ***подпространством*** этого пространства.

Пример. Рассмотрим множество L_1 всех функций $x(t) \in C_{[a,\,b]}$, таких что $x(a) = x(b) = 0$. Покажем, что L_1 образует подпространство для $C_{[a,\,b]}$.

1. Проверим линейность множества: $\alpha x(a) + \beta y(a) = 0$, $\alpha x(b) + \beta y(b) = 0$, $\Rightarrow \alpha x + \beta y \in L_1$, т.е. L_1 – линейное.

2. Проверим замкнутость множества. Пусть последовательность $\{x_n(t)\} \in L_1$ равномерно сходится к некоторой предельной функции $x_0(t)$, причем $x_n(a) = x_n(b) = 0 \ \forall n$. Тогда в пределе при $n \to \infty$, получаем $x_0(a) = 0$, $x_0(b) = 0$, т.е. $x_0(t) \in L_1$ и множество L_1 замкнуто.

Таким образом, L_1 по определению является подпространством.

2.2. Нормированные пространства

Определение. Линейное пространство L называется ***нормированным*** пространством, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. $\forall$ элементу $x \in L$ ставится в соответствие по некоторому правилу вещественное число, называемое нормой этого элемента, обозначаемое $\|x\|$.

2. Указанное правило подчинено 3 аксиомам:

1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall\, x \in L$, причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ для $\forall x \in L$ и для любого вещественного λ (однородность нормы);

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для $\forall x, y \in L$ (неравенство треугольника).

Покажем, что любое линейное нормированное пространство можно сделать метрическим, если ввести метрику следующим образом:

$$\rho(x,\, y) = \|x - y\|.$$

Очевидно, что $\rho(x,\, y) \geq 0$. Проверим выполнение аксиом метрики:

1. Аксиома тождества: если $\rho(x,\, y) = 0$, то $\|x - y\| = 0$, $x - y = \theta$, т.е. $x = y$; если же $x = y$, то $\rho(x,\, y) = \rho(x,\, x) = \|x - x\| = \|\theta\| = 0$.

2. Аксиома симметрии: так как $y - x = (-1)(x - y)$, то $\|y - x\| = |-1| \cdot \|x - y\| = \|x - y\|$, т.е. $\rho(x,\, y) = \rho(y,\, x)$.

3. Аксиома треугольника:

$$\rho(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \le \|x - y\| + \|y - z\| = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Таким образом, любое линейное нормированное пространство является метрическим пространством. Отсюда, в частности, имеем:

$$\|x\| = \|x - \theta\| = \rho(x, \theta).$$

Все рассмотренные ранее конкретные метрические пространства можно сделать линейными нормированными пространствами. В частности:

1) пространство R^1, если $\|x\| = |x|$;

2) пространство E_n, если $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$;

3) пространство l_2, если $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2}$;

4) пространство m, если $\|x\| = \sup\limits_i |\xi_i|$;

5) пространство $C_{[a,\, b]}$, если $\|x\| = \max\limits_{a \le t \le b} |x(t)|$;

6) пространство R_p^n, если $\rho(x, y) = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Выполнение 1-го и 2-го свойства нормы всюду очевидны. Выполнение же третьего свойства вытекает из проведенного для каждого из перечисленных пространств доказательства выполнения аксиомы треугольника. Действительно,

$$\|x + y\| = \rho(x + y, \theta) \le \rho(x + y, y) + \rho(y, \theta) = \|x + y - y\| + \|y\| = \|x\| + \|y\|.$$

2.3. Предельные соотношения в линейных нормированных пространствах

Пусть $\{x_n\}$ – последовательность в линейном нормированном пространстве L и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$. Если $\rho(x, y) = \|x - y\|$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. В связи с этим говорят, что сходимость в нормированном пространстве есть сходимость ***по норме.***

Определение. Линейное нормированное пространство, полное в смысле сходимости по норме, называется ***Банаховым пространством***.

Покажем, что норма непрерывна, т.е. если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$.

Из неравенства треугольника следует: $\|x\| = \|y + (x-y)\| \le \|y\| + \|x-y\|$. Отсюда $\|x\| - \|y\| \le \|x-y\|$ и аналогично, $\|y\| - \|x\| \le \|y-x\| = \|x-y\|$. Таким образом,

$$\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \le \|x-y\|.$$

Поэтому, если $\|x_n - x\| \to 0$, то и $\big|\,\|x_n\| - \|x\|\,\big| \to 0$. Это равносильно тому, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$, т.е. норма непрерывна.

Покажем теперь непрерывность действий сложения и умножения на число. Пусть $x_n \to x, y_n \to y, \lambda_n \to \lambda$ при $n \to \infty$, т.е. $\|x_n - x\| \to 0$, $\|y_n - y\| \to 0$, $|\lambda_n - \lambda| \to 0$. Тогда

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \le \|x_n - x\| + \|y_n - y\|.$$

Отсюда $x_n + y_n \to x + y$ при $n \to \infty$.

Аналогично

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|(\lambda_n x_n - \lambda_n x) + (\lambda_n x - \lambda x)\| \le \|\lambda_n (x_n - x)\| + \|(\lambda_n - \lambda) x\| =$$

$$= |\lambda_n| \cdot \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \cdot \|x\|.$$

Отсюда $\lambda_n x_n \to \lambda x$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$, составленный из элементов линейного нормированного пространства. Его сходимость определяется обычным образом, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = S$.

Определение. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ называется ***абсолютно сходящимся*** в линейном нормированном пространстве, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$.

Теорема. Если в банаховом пространстве B ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится абсолютно, то он сходится и в обычном смысле.

Доказательство

Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ сходится, то по определению $\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| = \lim_{n\to\infty} W_n$, т.е. последовательность $\{W_n\}$ сходится, а следовательно, является фундаментальной. По определению

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon): \forall\, n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow \rho(W_n,\, W_m) < \varepsilon,$$

что в нормированном пространстве равносильно неравенству $\|W_n - W_m\| < \varepsilon$.

Пусть частичная сумма исследуемого ряда $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. При $n > m$

$$\|S_n - S_m\| = \|x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_n\| \le \|x_{m+1}\| + \|x_{m+2}\| + \ldots + \|x_n\| = W_n - W_m.$$

Так как $\|W_n - W_m\| < \varepsilon$, то $W_n - W_m \to 0$, и $\|S_n - S_m\| \to 0$, т.е. по определению $\{S_n\}$ – фундаментальная последовательность, причем в полном пространстве B. Но тогда $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S \in B$, а это и значит, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится.

2.4. Гильбертовы пространства

Определение. ***Скалярным произведением*** в действительном линейном пространстве L называется вещественная функция (x, y), определенная для любой пары элементов $x, y \in L$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1) $(x, y) = (y, x)$;

2) $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$;

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ для любого вещественного λ;

4) $(x, x) \geq 0$ и $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Определение. Линейное пространство с введенным в нем скалярным произведением называется ***евклидовым пространством***.

Евклидово пространство можно сделать нормированным, если ввести норму как

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Проверим выполнение аксиом нормы, предварительно доказав неравенство Шварца

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

или в другом виде

$$(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y).$$

Введем $\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y)$. Очевидно, что $\varphi(\lambda) \geq 0$ при всех λ. При этом $\varphi(\lambda) = \lambda^2 (x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y)$ – квадратный трехчлен относительно λ, а значит, дискриминант этого выражения $D = (x, y)^2 - (x, x) \cdot (y, y) \leq 0$. Отсюда и следует доказываемое.

Вернемся к аксиомам нормы:

1) $\|x\| \geq 0$ и $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ – очевидно из 4-го свойства скалярного произведения;

2) $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x, x)} = |\lambda| \cdot \|x\|$;

3) $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \leq$
$\leq \|x\|^2 + 2\sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)} + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$. Отсюда и следует $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Теперь покажем, что скалярное произведение непрерывно, т.е. если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y)$.

Рассмотрим разность

$$(x_n, y_n) - (x, y) = ((x_n, y_n) - (x_n, y)) + ((x_n, y) - (x, y)) = (x_n, y_n - y) + (x_n - x, y).$$

Применяя неравенство Шварца, оценим величину по модулю:
$$|(x_n, y_n)-(x, y)|=|(x_n, y_n - y)+(x_n - x, y)|\le|(x_n, y_n - y)|+|(x_n - x, y)|\le$$
$$\le\|x_n\|\cdot\|y_n - y\|+\|x_n - x\|\cdot\|y\|.$$

Отсюда, учитывая непрерывность нормы и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n)=(x, y)$.

Определение. ***Гильбертовым вещественным пространством*** H называется бесконечномерное полное нормированное вещественное пространство, в котором норма порождена скалярным произведением.

Пример. Пространство вещественных чисел, если $(x, y)=x\cdot y$.

2.5. Ортогональность в гильбертовом пространстве

Определение. Два элемента $x\in H$ и $y\in H$ называются ***ортогональными***, если $(x, y)=0$.

Из свойств скалярного произведения получаем:

1. $\theta\perp x \quad \forall x\in H$.

Действительно, $(x,\theta)=(x, y-y)=(x, y)-(x, y)=0$.

2. $x\perp x\Leftrightarrow x=\theta$.

Если $x\perp x$, то $(x, x)=0\Leftrightarrow x=\theta$.

3. Если $x\in H$ ортогонален каждому элементу y_k некоторого множества $A\subset H$, то x ортогонален и любому элементу линейной оболочки множества A.

Действительно, $\left(x, \sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k y_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k(x, y_k)=0$.

4. Если $x\in H$ ортогонален каждому элементу последовательности $\{y_n\}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, то x ортогонален y.

Это свойство следует из непрерывности скалярного произведения.

Обобщенная теорема Пифагора. Если $x=\sum\limits_n x_n$ (сумма может быть как конечной, так и бесконечной), и все $x_n\in H$ и попарно ортогональны, то $\|x\|^2=\sum\limits_n\|x_n\|^2$.

Доказательство

$$\|x\|^2=(x,x)=\left(x,\sum_n x_n\right)=\sum_n(x,x_n)=\sum_n\left(\sum_m x_m,x_n\right)=\sum_n\sum_m(x_m,x_n)=\sum_n\|x_n\|^2.$$

Теорема. Для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$, составленный из попарно ортогональных элементов пространства H, сходился, необходимо и достаточно, чтобы сходился числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2$.

Доказательство

Необходимость. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ сходится, то он имеет конечную сумму, т.е. $\exists x=\sum_{n=1}^{\infty}x_n$. По обобщенной теореме Пифагора $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2=\|x\|^2$, следовательно, сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2$ тоже конечна, а сам ряд сходится.

Достаточность. Рассмотрим разность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ при $n>m$: $S_n-S_m=\sum_{k=m+1}^{n}x_k$. По обобщенной теореме Пифагора $\|S_n-S_m\|^2=\sum_{k=m+1}^{n}\|x_k\|^2$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2$ сходится, то $\lim_{n,m\to\infty}\|S_n-S_m\|^2=0$, и последовательность $\{S_n\}$ является фундаментальной. Вследствие полноты пространства H $\exists\lim_{n\to\infty}S_n\in H$, а следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ сходится.

Определение. Элемент $x\in H$ называется ***ортогональным подпространству*** $P\subset H$, если x ортогонален любому элементу $y\in P$.

Определение. Два подпространства P_1 и P_2 гильбертова пространства H называются ***ортогональными*** ($P_1 \perp P_2$), если $x \perp y$ для $\forall x \in P_1$ и $\forall y \in P_2$.

Определение. Множество всех $x \in H$, ортогональных подпространству $P \subset H$, называется ***ортогональным дополнением подпространства*** P и обозначается $P^{\perp}$.

Утверждение. $P^{\perp}$ – подпространство H.

Доказательство

1. Покажем линейность множества.

Пусть $x \in P^{\perp}$ и $y \in P^{\perp}$, тогда для $\forall z \in P$ $(x, z) = 0$ и $(y, z) = 0$. Отсюда $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) = 0$ для $\forall \alpha, \beta$. Таким образом элемент $\alpha x + \beta y \perp z$, т.е. $\alpha x + \beta y \in P^{\perp}$ и по определению $P^{\perp}$ – линейно.

2. Покажем замкнутость множества.

Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, где $x_n \in P^{\perp}$ для $\forall n$. Тогда $(x_n, y) = 0$ для $\forall y \in P$, и $\lim\limits_{n \to \infty}(x_n, y) = 0$. В силу непрерывности скалярного произведения $\lim\limits_{n \to \infty}(x_n, y) = \left(\lim\limits_{n \to \infty} x_n, y\right) = (x, y)$, следовательно $(x, y) = 0$. Таким образом, предельная точка $x \in P^{\perp}$ и множество $P^{\perp}$ – замкнуто.

Так как $P^{\perp}$ линейно и замкнуто, то по определению $P^{\perp}$ – подпространство.

Теорема. Пусть P – подпространство в H. Тогда любой элемент $x \in H$ можно представить и притом единственным образом в виде $x = y + z$, где $y \in P, z \in P^{\perp}$.

Доказательство

1. Докажем возможность представить элемент x в виде $x = y + z$.

Если $x \in P$, то положив $y = x, z = \theta$, получим $x = x + \theta$.

Пусть теперь $x \notin P$. Обозначим $d = \inf\limits_{y \in P}\|x - y\|$, где точная нижняя грань определяется по всему множеству элементов $y \in P$, т.е.

$$\|x - y\| \geq d \quad \forall y \in P. \tag{1}$$

Зададим последовательность $d_n = d + \frac{1}{n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ldots)$. Из определения точной нижней грани следует, что при каждом n $\exists y_n \in P$, для которого

$$\|x - y_n\| \le d_n. \tag{2}$$

Покажем фундаментальность последовательности $\{y_n\}$.

Используя соотношение $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$, получим: $\|(x-y_n)+(x-y_m)\|^2 + \|(x-y_n)-(x-y_m)\|^2 = 2\left(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2\right)$. Отсюда

$$\|2x-(y_n+y_m)\|^2 + \|y_m - y_n\|^2 = 2\left(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2\right). \tag{3}$$

Так как $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in P$, то из (1) следует $\left\|x - \frac{1}{2}(y_n+y_m)\right\| \ge d$ или

$$\|2x-(y_n+y_m)\|^2 = 4\left\|x - \frac{1}{2}(y_n+y_m)\right\|^2 \ge 4d^2. \tag{4}$$

Из (3) получаем:

$$\|y_m - y_n\|^2 = 2\left(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2\right) - \|2x-(y_n+y_m)\|^2 \le$$
$$\le 2\left(d_n^2 + d_m^2\right) - 4d^2.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = d$, то $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|y_m - y_n\| = 0$, т.е. последовательность $\{y_n\}$ – фундаментальная. Вследствие полноты H $\exists y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, а так как множество P замкнуто (по определению подпространства), то $y \in P$, и $\|x-y\| = \lim\limits_{n\to\infty}\|x-y_n\|$. При этом из (1) $\|x-y\| \ge d$, а из неравенства (2) $\|x-y_n\| \le d_n$. Сопоставляя, получим $\|x-y\| = d$.

Обозначим $z = x-y$ и докажем, что $z \perp w$ $\forall w \in P$.

При $\forall \varepsilon > 0$ элемент $y + \varepsilon w \in P$ (вследствие линейности P). Из (1) $\|x-(y+\varepsilon w)\| \ge d$. Тогда $\|x-(y+\varepsilon w)\|^2 = \|z-\varepsilon w\|^2 = (z-\varepsilon w,\ z-\varepsilon w) =$
$= \|z\|^2 - 2\varepsilon(z,w) + \varepsilon^2\|w\|^2 = d^2 - 2\varepsilon(z,w) + \varepsilon^2\|w\|^2 \ge d^2$.

Отсюда $(z,\ w) \le \frac{\varepsilon\|w\|^2}{2}$. Так как элемент $-w$ также принадлежит P, то для него справедливо $(z,-w)\le\frac{\varepsilon\|-w\|^2}{2}$, откуда $(z,w)\ge-\frac{\varepsilon\|w\|^2}{2}$.

Таким образом, $|(z,w)|\le\frac{\varepsilon\|w\|^2}{2}$ для $\forall\varepsilon>0$, т.е. $(z,w)=0$, и $z\in P^{\perp}$. Элемент $z=x-y$, следовательно, $x=y+z$, где $y\in P,\ z\in P^{\perp}$.

2. Докажем единственность такого представления элемента x.

Пусть $x=y+z$ и $x=y_1+z_1$, тогда $y+z=y_1+z_1$ и $y-y_1=z_1-z$. Так как $(y-y_1)\in P,\ (z_1-z)\in P^{\perp}$, то, очевидно, что $y-y_1=z_1-z=\theta$, т.е. $y=y_1,\ z=z_1$ и единственность доказана.

Определение. Элемент $y\in P$ называется ***проекцией элемента*** x на подпространство P, а элемент $z\in P^{\perp}$ – проекцией на $P^{\perp}$, если $x=y+z$, $x\in H$.

2.6. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве

Определение. Система элементов (конечная или счетная) $\{e_n\}$ гильбертова пространства H называется ***ортогональной***, если $(e_i,e_k)=0$ при $i\ne k$, и $\|e_n\|\ne 0\ \forall n$. Если при этом $\|e_n\|=1\ \forall n$, то система называется ***ортонормированной***.

Очевидно, что для ортонормированной системы справедливо $(e_i,e_k)=\delta_{ik}$.

Определение. Ряд вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k e_k$ называется ***рядом Фурье*** элемента x по ортонормированной системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, а числа x_k, определяемые равенством $x_k=(x,e_k)$, называются ***коэффициентами Фурье***.

Теорема. Из всех возможных сумм вида $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k e_k$ наилучшее приближение элемента $x\in H$ дает частичная сумма $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k e_k$ его ряда Фурье.

Доказательство

Рассмотрим разность $x - S_n$ и подберем коэффициенты λ_k так, чтобы значение $\|x - S_n\|$ было минимальным:

$$\|x - S_n\|^2 = \left(x - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i,\, x - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right) = (x, x) - 2\left(x,\, \sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right) +$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i,\, \sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right) = \|x\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2 = \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - x_k)^2 - \sum_{k=1}^{n}x_k^2 .$$

Коэффициенты λ_k входят только во второе слагаемое. Очевидно, что из всех значений $\|x - S_n\|^2$ наименьшим будет то, в котором $\lambda_k = x_k$, а именно $\|x - S_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}x_k^2$. Но тогда $S_n = \sum_{k=1}^{n}x_k e_k$, а это и есть частичная сумма ряда Фурье. Теорема доказана.

Следует отметить, что так как $\|x - S_n\|^2 \ge 0$, то $\sum_{k=1}^{n}x_k^2 \le \|x\|^2$. Здесь n произвольно, а $\|x\|^2$ не зависит от n, поэтому ряд $\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2$ сходится, и выполняется ***неравенство Бесселя***:

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2 \le \|x\|^2 .$$

Определение. Ортонормированная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ***замкнутой***, если для любого $x \in H$ справедливо ***равенство Парсеваля***:

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2 = \|x\|^2 .$$

Замкнутость системы равнозначна тому, что для каждого $x \in H$ частичные суммы ряда Фурье $\sum_{k=1}^{n}x_k e_k$ сходятся к x.

Теорема. В гильбертовом пространстве H для каждого $x \in H$ ряд Фурье по любой ортонормированной системе $\{e_k\}$ сходится. При этом если x_0 – сумма этого ряда, то элемент $x - x_0$ ортогонален ко всем элементам системы $\{e_k\}$.

Доказательство

Пусть $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Тогда при $m > 0$

$$\|S_{n+m} - S_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+m} x_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+m} \|x_k e_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+m} x_k^2 .$$

Так как в силу неравенства Бесселя ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ сходится, то $\forall\ \varepsilon^2 > 0\ \exists$ $N = N(\varepsilon): \forall n > N \Rightarrow |r_n| < \varepsilon^2$, а именно $\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2 < \varepsilon^2$, а значит, и $\sum_{k=n+1}^{n+m} x_k^2 < \varepsilon^2$.

Таким образом, при $n \ge N$, $m > 0$ $\|S_{n+m} - S_n\| < \varepsilon$, и последовательность $\{S_n\}$ является фундаментальной. Пространство H полное, следовательно, $\{S_n\}$ сходится, т.е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = x_0$, и $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k = x_0$.

Рассмотрим элемент $x - x_0$:

$$(x - x_0, e_k) = (x, e_k) - (x_0, e_k) = x_k - \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n, e_k \right) = x_k - x_k = 0,$$

т.е. элемент $x - x_0$ ортогонален ко всем элементам системы $\{e_k\}$. Теорема доказана.

Определение. Система элементов $\{e_k\}$ называется ***полной*** в H, если замыкание ее линейной оболочки $L(e_1, e_2, ..., e_n)$ совпадает со всем H, т.е. если множество $L(e_1, e_2, ..., e_n)$ всюду плотно в H.

Иными словами, полнота системы $\{e_k\} \in H$ означает, что

$$\forall\ \ x \in H \text{ и } \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon, x) \text{ и} \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n : \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| < \varepsilon .$$

Теорема. Для того чтобы ортонормированная система $\{e_k\} \in H$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $x \in H$ его ряд Фурье сходился к самому элементу x.

Доказательство

1. ***Необходимость.***

Так как система $\{e_k\}$ полная, то $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| < \varepsilon$. Но наименьшее значение величины $\| x - S_n \|$ дает частичная сумма ряда Фурье, а значит $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\| < \varepsilon$. Отсюда и следует, что $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$.

2. ***Достаточность.***

Пусть $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$, тогда $\lim_{n \to \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\| = 0$. Но тогда $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists\ N = N(\varepsilon, x)$ такой, что $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\| < \varepsilon$, т.е. система $\{e_k\}$ является полной. Теорема доказана.

Теорема. Ортонормированная система $\{e_k\} \in H$ является полной тогда и только тогда, когда для любого элемента $x \in H$ выполняется равенство Парсеваля $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$.

Доказательство

При доказательстве первой теоремы параграфа было получено равенство

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2 .$$

Из него при $n \to \infty$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x-\sum_{k=1}^{n}x_k e_k\right\|^2=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)=0$$

или
$$x=\sum_{k=1}^{\infty}x_k e_k \Leftrightarrow \|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2 .$$

Первое равенство равносильно полноте системы $\{e_k\}$ в силу предыдущей теоремы, а второе и есть равенство Парсеваля. Теорема доказана.

Следствие. Ортонормированная система $\{e_k\}\in H$ является полной тогда и только тогда, когда она замкнута.

Теорема Рисса – Фишера. Пусть $\{e_k\}\in H$ – ортонормированная система, а числа λ_k такие, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2$ сходится. Тогда существует элемент $x\in H:\lambda_k=(x,e_k)$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2=(x,x)=\|x\|^2$.

Доказательство.

Обозначим $x_n=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k$. Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. При $m>n$

$$\|x_m-x_n\|^2=\left\|\sum_{k=n+1}^{m}\lambda_k e_k\right\|^2=\sum_{k=n+1}^{m}\|\lambda_k e_k\|^2=\sum_{k=n+1}^{m}\lambda_k^2 .$$

Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2$ сходится, то

$$\forall\ \varepsilon^2>0\ \exists\ N=N(\varepsilon):\forall n>N\Rightarrow|r_n|<\varepsilon^2,\text{ т.е. }\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k^2<\varepsilon^2$$

и отсюда следует $\sum_{k=n+1}^{m}\lambda_k^2<\varepsilon^2$. Таким образом, при $n\ge N$, $m>0$ $\|x_m-x_n\|<\varepsilon$, и последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной. Так как пространство H полное, то $\{x_n\}$ сходится, т.е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, или $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$.

Тогда $(x, e_m) = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k, e_m \right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k (e_k, e_m) = \lambda_m$,

$$\|x\|^2 = (x, x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k, \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m e_m \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_k \lambda_m (e_k, e_m) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 .$$

Теорема доказана.

Отметим, что во всех теоремах данного параграфа заранее предполагалось, что ортонормированная система $\{e_k\} \in H$ существует. Докажем, что если H – сепарабельное пространство, то такую систему в нем всегда можно получить.

Пусть H – сепарабельное пространство. Тогда существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, сходящаяся к элементу $x \in H$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда для $k \geq k(\varepsilon)$ будет

$$\left\| x - x_{n_k} \right\| < \varepsilon .$$

Перепишем это так: $\left\| x - \left(0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_{n_{k-1}} + 1 \cdot x_{n_k}\right) \right\| < \varepsilon$.

Неравенство такого вида выполняется для каждого $x \in H$ (хотя числа n_k для разных x, вообще говоря, различны). Поэтому последнее неравенство означает, что система $\{x_k\}$ – полная. Будем в этой последовательности отбрасывать те элементы, которые являются линейными комбинациями предыдущих элементов. Тогда получим новую систему $\{p_k\} \subset \{x_k\}$. По построению она линейно независима, а значит, ее можно ортогонализировать, например, методом Грамма – Шмидта (см. приложение 2).

Пусть $\{e_k\}$ – построенная по ней ортонормированная система. Из описания метода Грамма – Шмидта следует, что $\{e_k\}$ при любом k является линейной комбинацией элементов $p_1, p_2, ..., p_k$. Следовательно, система $\{e_k\}$ имеет ту же линейную оболочку, что и $\{p_k\}$. Но, очевидно, что

$$L(p_1, p_2, ...) = L(x_1, x_2, ...).$$

Поскольку система $\{x_k\}$ – полная, то множество $L(x_1, x_2, ...)$ всюду плотно в H. Отсюда следует, что и множество $L(e_1, e_2, ...)$ всюду плотно в H. Это означает существование таких $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, что величина

$$\|x - (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_m e_m)\|$$

будет сколь угодно малой. Отсюда, в свою очередь, следует, что система $\{e_k\}$ – полная. Но тогда ряд Фурье для элемента x по системе $\{e_k\}$ сходится к x, т.е.

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k .$$

Последнее равенство и означает, что система $\{e_k\}$ образует ортонормированный базис в H.

Глава 3. ОПЕРАТОРЫ В ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

3.1. Линейные операторы

Пусть E_x и E_y – некоторые линейные пространства, а $D \subset E_x$ – некоторое множество. Если каждому $x \in D$ отвечает по определенному правилу некоторый элемент $y \in E_y$, то говорят, что на множестве $D \subset E_x$ задан оператор со значениями в пространстве E_y. Это записывается так:

$$y = Ax.$$

Множество D – область определения оператора A. В частном случае ею может быть и все пространство E_x. Тогда оператор $A: E_x \to E_y$ (т.е. действует из пространства E_x в пространство E_y). Говорят также, что оператор A отображает пространство E_x в пространство E_y. Пространство E_y называют тогда пространством образов, а E_x – пространством прообразов.

В ряде случаев пространства образов и прообразов совпадают, тогда говорят, что оператор A отображает пространство E_x в себя.

Примеры

1. Пусть $E_x = E_n$ – евклидово пространство n-мерных векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Определим оператор A формулой $Ax = (x_1, 2x_2, \ldots, nx_n)$. Этот оператор определен во всем E_n и элемент $Ax \in E_n$. Таким образом, $A: E_n \to E_n$ (оператор отображает пространство само в себя).

2. Пусть $E_x = C_{[a,\, b]}$, а оператор A для элемента $x = f(t)$ задан формулой

$$Ax = \frac{df}{dt},$$

(т.е. A – оператор дифференцирования). В этом случае оператор A задан не на всем E_x, а лишь на множестве $D \subset E_x$ функций, дифференцируемых на интервале $[a, b]$. Пространство же E_y в данном случае шире пространства $C_{[a,\, b]}$, поскольку производная дифференцируемой функции может и не быть непрерывной.

3. Пусть E_x – множество всех функций $x = f(t)$, кусочно-непрерывных в интервале $[0,1]$. Зададим оператор A формулой

$$Ax = \int_0^t f^2(s)ds.$$

Этот оператор задан во всем пространстве E_x, а пространством образов является пространство $C_{[0,1]}$ (поскольку первообразная кусочно-непрерывной функции есть непрерывная функция).

Определение. Пусть E_x, E_y – линейные пространства. Оператор $A: E_x \to E_y$ называется ***линейным***, если он аддитивен и однороден, т.е. если:

1) $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 \quad \forall\, x_1, x_2 \in E_x$;

2) $A(\lambda x) = \lambda \cdot Ax \quad \forall\, x \in E_x$ и $\forall\, \lambda$ из соответствующего поля чисел.

При этом E_x, E_y – одновременно вещественные или комплексные пространства.

Примеры

1. Пусть оператор A переводит элемент $x = \varphi(t)$ в элемент $y = f(t)$ по формуле

$$f(t) = \int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds.$$

Здесь ядро $K(t, s) \in C_Q$, где $Q = [a;b] \times [a;b]$. Если $x \in C_{[a,b]}$, то очевидно, и $y \in C_{[a,b]}$. Следовательно, оператор $A: C_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$.

Проверим линейность оператора:

$$A(x_1 + x_2) = \int_a^b K(t,s)(\varphi_1(s) + \varphi_2(s))ds = \int_a^b K(t,s)\varphi_1(s)ds + \int_a^b K(t,s)\varphi_2(s)ds =$$

$$= Ax_1 + Ax_2.$$

Аналогично проверяется $A(\lambda x)=\lambda\cdot Ax$. Таким образом, оператор A линеен.

Отметим, что рассмотренный оператор называется линейным интегральным оператором или оператором Фредгольма.

2. Пусть E_x – евклидово пространство E_n. Зададим матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ - & - & - \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда равенства

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ ---------------- \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

определяют некоторый оператор $y = Ax$, переводящий каждый элемент $x=(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ из E_n в элемент $y=(y_1, y_2,\ldots,y_n)$ того же пространства. Этот оператор, как легко видеть, аддитивен и однороден, а значит, линеен.

Определение. Оператор A, отображающий $D\subset E_x$ в пространство E_y, называется ***непрерывным*** в точке $x_0\in D$, если при $n\to\infty$ для любой последовательности $\{x_n\}\to x_0$ из D следует $\{Ax_n\}\to Ax_0$ в пространстве E_y.

Определение. Оператор A называется ***непрерывным на множестве*** D, если он непрерывен в каждой точке $x\in D$.

Пример

Проверим непрерывность оператора Фредгольма

$$A\varphi(t)=\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds.$$

Для этого предположим, что в $C_{[a,\,b]}$ будет $x_n\to x$, т.е. $\varphi_n(t)\to\varphi(t)$ при $n\to\infty$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b K(t,s)\varphi_n(s)ds = \int_a^b K(t,s)\lim_{n\to\infty}\varphi_n(s)ds = \int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds$$

или $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = Ax$, что и означает непрерывность оператора.

Отметим, что если $A: E_x \to E_y$, где E_x и E_y – метрические линейные пространства, то непрерывность оператора A в точке $x_0 \in E_x$ означает, что

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho(Ax, Ax_0) < \varepsilon .$$

Приведем некоторые свойства операторов:

1) если A – непрерывный линейный оператор, то $A(\theta) = \theta$, $A(-x) = -Ax$;

2) если E_x, E_y – линейные вещественные пространства и аддитивный оператор $A: E_x \to E_y$ непрерывен в точке $x_0 \in E_x$, то A непрерывен и на всем E_x;

3) если A – аддитивный и непрерывный оператор, заданный в вещественном пространстве, то он однороден (т.е. и линеен).

3.2. Ограниченный линейный оператор и его норма

Пусть E_x и E_y – линейные нормированные пространства. Это частный случай линейного пространства и все сказанное выше справедливо и в данном случае.

Определение. Линейный оператор $A: E_x \to E_y$ называется ***ограниченным***, если существует такое $M > 0$, что для любых $x \in E_x$

$$\|Ax\| \le M\,\|x\| .$$

Здесь $\|x\|$ вычисляется в смысле нормы пространства E_x, а $\|Ax\|$ – в смысле нормы пространства E_y.

Очевидно, что если оператор A ограничен, то он любое ограниченное множество $m \in E_x$ преобразует в ограниченное же множество $n \in E_y$.

Пример

Пусть A – оператор Фредгольма, действующий из $C_{[a,\,b]}$ в $C_{[a,\,b]}$, т.е.

$$A\varphi(t)=\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds,$$

где $K(t,s)\in C_Q$, где $Q=[a;b]\times[a;b]$. Обозначим $M = \max\limits_{t\in[a,\, b]}\int_a^b |K(t,s)|ds$.

Тогда

$$\|Ax\| = \max_{t\in[a,\, b]}\left|\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds\right| \le \max_{t\in[a,\, b]}\int_a^b |K(t,s)|\cdot|\varphi(s)|ds \le$$

$$\le \max_{t\in[a,\, b]}\int_a^b |K(t,s)|ds\cdot \max_{s\in[a,\, b]}|\varphi(s)| = M\cdot\|x\|.$$

Таким образом, $\|Ax\|\le M\cdot\|x\|$ и по определению оператор A ограничен.

Теорема. Для того чтобы линейный оператор был непрерывен, необходимо и достаточно, чтобы он был ограничен.

Доказательство

Необходимость. Оператор A – непрерывен. Предположим, что он не является ограниченным. Тогда существует такая последовательность $\{x_n\}$, что

$$\|Ax_n\|>n\|x_n\|.$$

Построим по ней новую последовательность $\{u_n\}$, где $u_n=\dfrac{1}{n\|x_n\|}x_n$. Имеем

$$\|u_n\|=\frac{1}{n\|x_n\|}\|x_n\|=\frac{1}{n}.$$

Так что $\{u_n\}\to 0$. В то же время

$$\|Au_n\|=\left\|A\left(\frac{1\cdot x_n}{n\|x_n\|}\right)\right\|=\frac{1}{n\|x_n\|}\|Ax_n\|>\frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|}>1,$$

а значит $Au_n\not\to 0$ при $n\to\infty$, т.е. условие непрерывности оператора не выполняется, что противоречит условию. Таким образом, исходное предположение неверно, оператор A – ограничен.

Достаточность. Оператор A линеен и ограничен, т.е. $\|Ax\|\le M\cdot\|x\|$. Пусть $x_n\to x$ при $n\to\infty$, тогда и $\|x_n-x\|\to 0$. Но

$$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \le M\|x_n - x\| \to 0,$$

т.е.
$$x_n \to x \Rightarrow Ax_n \to Ax,$$

что и означает непрерывность оператора. Теорема доказана.

Пусть A – ограниченный линейный оператор, действующий из E_x в E_y. Тогда существует такое $M > 0$, что для любых $x \in E_x$

$$\|Ax\| \le M\|x\|.$$

Очевидно, что множество всех M, для которых это неравенство выполняется, ограничено снизу, а значит, имеет точную нижнюю грань. Ее называют ***нормой*** оператора A и обозначают $\|A\|$. Из определения точной нижней грани следует, что

$$1)\ \forall x \in E_x \quad \|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|; \tag{1}$$

$$2)\ \forall \varepsilon > 0\, \exists x \in E_x:\ \|Ax\| > (\|A\| - \varepsilon) \cdot \|x\|. \tag{2}$$

Теорема.

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\|.$$

Доказательство

Так как $\|x\| \le 1$, то в силу (1) $\|Ax\| \le \|A\|$, а значит, и

$$\sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\| \le \|A\|. \tag{3}$$

Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое $x \in E_x$, для которого выполняется (2). Построим по этому x элемент $x^0 = \dfrac{x}{\|x\|}$. Для него

$$\|Ax^0\| = \left\| \frac{1}{\|x\|} Ax \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|Ax\| > \frac{1}{\|x\|} (\|A\| - \varepsilon) \|x\|,$$

т.е.

$$\|Ax^0\| > \|A\| - \varepsilon.$$

Но x^0 – один из элементов множества $\{x : \|x\| \le 1\}$, поэтому тем более

$$\sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\| > \|A\| - \varepsilon,$$

а поскольку ε можно взять сколь угодно малым, то

$$\sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\| \ge \|A\|. \tag{4}$$

Сравнивая (3) и (4), получим:

$$\sup_{\|x\|\le 1}\|Ax\| = \|A\|.$$

Теорема доказана.

Утверждение. $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|$.

Пусть $\|x\| = \lambda$, где $\lambda < 1$. Построим элемент $x^0 = \dfrac{x}{\lambda}$, тогда $x = \lambda x^0$, а значит, $\|Ax\| = \left\|A\left(\lambda x^0\right)\right\| = \lambda\left\|Ax^0\right\|$. Отсюда

$$\sup_{\|x\|<1}\|Ax\| = \sup_{\lambda<1}\lambda\cdot\sup_{x^0}\left\|Ax^0\right\|,$$

но $\sup\limits_{\lambda<1}\lambda = 1$, а $\sup\limits_{x^0}\left\|Ax^0\right\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|$. Поэтому

$$\sup_{\|x\|<1}\|Ax\| = \sup_{\|x\|=1}\|Ax\|.$$

В связи с этим норму оператора можно записать так:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1}\|Ax\|.$$

Утверждение доказано.

Примечание. Последнему равенству в силу линейности оператора A можно придать такой вид

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\ne 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

(наибольший коэффициент растяжения при отображении E_x в E_y).

Пример

Пусть A – оператор Фредгольма с непрерывным ядром, действующий из $C_{[a,\,b]}$ в $C_{[a,\,b]}$. Тогда, как мы видели,

$$\|Ax\| \le \max_{t\in[a,\,b]}\int_a^b|K(t,s)|ds\cdot\max_{s\in[a,\,b]}|\varphi(s)| = M\cdot\|x\|.$$

Отсюда следует, что $$\|A\| \le \max_{t\in[a,\,b]}\int_a^b|K(t,s)|ds.$$

Можно показать, что здесь имеет место равенство, т.е. в данном случае

$$\|A\| = \max_{t\in[a,\,b]}\int_a^b|K(t,s)|ds.$$

3.3. Пространство линейных операторов и его полнота

Пусть E_x и E_y – линейные нормированные пространства. Обозначим через U множество всех линейных операторов, действующих из E_x в E_y.

Определение. Операторы A и B из множества U линейных операторов называются ***равными***, если $\forall x \in E_x \quad Ax = Bx$.

Определим на множестве U алгебраические операции.

1. Оператор C называется суммой операторов A и B ($C = A + B$), если $\forall\ x \in E_x \quad Cx = Ax + Bx$.

2. Оператор D называется произведением оператора A на число α ($D = \alpha A$), если $\forall\ x \in E_x$ и для любого вещественного $\alpha \quad Dx = \alpha Ax$.

Очевидно, что если $x \in E_x$, то $Cx \in E_y$ и $Dx \in E_y$. При этом, если операторы A и B линейны, можно показать, что C и D тоже линейны.

Пусть $\alpha = -1$. Оператор $(-1)A$ обозначим просто $-A$.

Нулевой оператор Θ введем следующим образом: $\forall\ x \in E_x \quad \Theta x = \theta$, где θ – нулевой элемент.

3. Легко видеть, что выполняются следующие равенства:

1) $A + B = B + A \quad \forall A, B \in U$;

2) $(A + B) + C = A + (B + C) \quad \forall A, B, C \in U$;

3) $\exists$ такой оператор $\Theta \in U$, что $A + \Theta = A \quad \forall A \in U$;

4) $\forall A \in U \ \ \exists$ такой оператор $-A \in U$, что $A + (-A) = \Theta$;

5) $1 \cdot A = A \quad \forall A \in U$;

6) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A \quad \forall \alpha, \beta \in R,\ \forall A \in U$;

7) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \quad \forall \alpha, \beta \in R,\ \forall A \in U$;

8) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \quad \forall \alpha \in R,\ \forall A, B \in U$.

Таким образом, на множестве U всех линейных операторов, действующих из E_x в E_y, выполняются все 8 аксиом линейного пространства, а значит, U – линейное пространство над полем вещественных чисел.

Если U – линейное пространство ограниченных операторов, то для каждого оператора $A \in U$ определяется его норма $\|A\|$. Проверим выполнение аксиом нормы.

1. Из утверждения $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|$, следовательно, $\|A\| \geq 0\ \forall A \in U$. Из определения ограниченного оператора $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$. Если $\|A\| = 0$, то $\|Ax\| = 0\ \forall x \in E_x$, т.е. $A = \Theta$. Обратно, если $A = \Theta$, то $Ax = \theta\ \forall x \in E_x$, т.е. $\|Ax\| = 0\ \forall x \in E_x$, и $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\| = 0$.

2. Пусть $A \in U$, а α – любое число, тогда $\|\alpha A\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\|\alpha Ax\| =$

$= |\alpha| \cdot \sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\| = |\alpha| \cdot \|A\|$.

3. Пусть $A \in U$ и $B \in U$. Тогда для любого $x \in E_x$

$\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| = (\|A\| + \|B\|) \cdot \|x\|$.

Отсюда по определению нормы $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Все аксиомы нормы выполнены, а значит, U является линейным нормированным пространством.

Рассмотрим $\{A_n\}$ – последовательность операторов из U.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n - A\| = 0$. Тогда для любого $x \in E$

$$\|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \leq \|A_n - A\| \cdot \|x\|,$$

т.е. $\|A_n x - Ax\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, если $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, то $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = Ax$ для любого $x \in E_x$.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Лемма. Если последовательность линейных операторов $\{A_n\}$ из U такова, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = Ax$ для любого $x \in E_x$;

2) $\exists M > 0 : \|A_n\| \leq M\ \ \forall n$, то оператор A – линеен.

Доказательство

Так как $\forall x \in E_x$ и $\forall y \in E_x$ их сумма $x + y \in E_x$, то

$$A(x+y) = \lim_{n\to\infty} A_n(x+y) = \lim_{n\to\infty}(A_n x + A_n y) = \lim_{n\to\infty} A_n x + \lim_{n\to\infty} A_n y = Ax + Ay,$$

т.е. A – аддитивен.

Далее в силу второго условия $\|A_n x\| \le \|A_n\| \cdot \|x\| \le M \cdot \|x\| \ \forall n$. Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$ и учитывая непрерывность нормы, получим:

$$\|Ax\| \le M\|x\|,$$

т.е. A – ограничен.

Из аддитивности и ограниченности оператора A следует его непрерывность (в силу теоремы). Но если оператор аддитивен и непрерывен, то он однороден, а значит линеен (по 3-му свойству операторов). Лемма доказана.

Теорема. Если пространство E_y полное, то и пространство U линейных ограниченных операторов $A: E_x \to E_y$ – полное.

Доказательство

Пусть $\{A_n\} \in U$ – фундаментальная последовательность линейных ограниченных операторов. По определению

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): \forall n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow \|A_n - A_m\| < \varepsilon.$$

Из 3-ей аксиомы нормы следует $\|(A_n - A_m) + A_m\| \le \|A_n - A_m\| + \|A_m\|$ или $\|A_n\| - \|A_m\| \le \|A_n - A_m\|$ (аналогично $\|A_m\| - \|A_n\| \le \|A_m - A_n\|$). Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): \forall n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow \big| \|A_n\| - \|A_m\| \big| < \varepsilon,$$

т.е. $\{A_n\}$ – фундаментальная последовательность, а значит и ограниченная. Отсюда следует, что $\exists M > 0$: $\|A_n\| \le M \ \ \forall n$ (второе условие леммы выполнено).

Далее при любом $x \in E_x$

$$\|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A_m)x\| \le \|A_n - A_m\| \cdot \|x\|,$$

а так как $\|A_n - A_m\| < \varepsilon$, то

$$\|A_n x - A_m x\| \le \varepsilon \cdot \|x\|,$$

так что последовательность $\{A_n x\} \in E_y$ также фундаментальна. Но E_y – полное пространство, а поэтому из фундаментальности $\{A_n x\}$ следует, что существует элемент $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x \in E_y$. Обозначим этот предел как результат действия оператора A, т.е. $Ax = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$ (первое условие леммы).

Так как оба условия леммы выполнены, то оператор A – линеен. При этом

$$\|Ax\| = \left\|\lim_{n\to\infty} A_n x\right\| = \lim_{n\to\infty}\|A_n x\| \le \lim_{n\to\infty}\|A_n\| \cdot \|x\| \le M \cdot \|x\|,$$

т.е. A – ограничен.

Таким образом, A есть линейный ограниченный оператор, действующий из E_x в E_y, а значит, $A \in U$. Осталось доказать, что $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$. Ранее получено, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) : \forall\, n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow \|A_n x - A_m x\| < \varepsilon \cdot \|x\|.$$

Пусть здесь $m \to \infty$. Тогда при $n > N(\varepsilon)$ получим

$$\|A_n x - Ax\| < \varepsilon\|x\| \text{ или } \|(A_n - A)x\| \le \varepsilon\|x\|.$$

Так как $\|A_n - A\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1}\|(A_n - A)x\|$, то $\|A_n - A\| < \varepsilon$, откуда и следует, что $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, т.е. U – полное пространство. Теорема доказана.

3.4. Обратный оператор

Определение. Пусть A и B – линейные операторы, причем $A : E_x \to E_y$, $B : E_y \to E_z$. ***Произведением*** BA операторов называется оператор, ставящий в соответствие $\forall x \in E_x$ элемент $z = B(Ax) \in E_z$.

Определение. Пусть $A: E_x \to E_y$. Оператор $A^{-1}: E_y \to E_x$ называется ***обратным к*** A**,** если $A^{-1}A = AA^{-1} = I$, где $Ix = x \quad \forall x \in E_x$.

Теорема. Пусть линейный оператор $A: E_x \to E_y$ (E_x и E_y – линейные нормированные пространства). Если $\forall x \in E_x \; \|Ax\| \ge m \cdot \|x\|$, где $m > 0$ – некоторая константа, то существует обратный линейный ограниченный оператор A^{-1}.

Доказательство

Пусть $Ax_1 = y$ и $Ax_2 = y$, тогда $A(x_1 - x_2) = y - y = \theta$, а значит $m\|x_1 - x_2\| \le \|A(x_1 - x_2)\| = 0$, т.е. $x_1 = x_2$ и оператор A отображает E_x в E_y однозначно. Ставя в соответствие $\forall y \in E_y$ его прообраз $x \in E_x$, мы получим оператор A^{-1}, который по смыслу своего введения и есть обратный.

Покажем его линейность, а именно – выполнение равенства

$$A^{-1}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 A^{-1} y_1 + \lambda_2 A^{-1} y_2 .$$

Рассмотрим элемент $x = A^{-1}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - \lambda_1 A^{-1} y_1 - \lambda_2 A^{-1} y_2$ и подействуем на него оператором A:

$$Ax = AA^{-1}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - A\left(\lambda_1 A^{-1} y_1\right) - A\left(\lambda_2 A^{-1} y_2\right) =$$

$$= \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 - \lambda_1\left(AA^{-1} y_1\right) - \lambda_2\left(AA^{-1} y_2\right) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 - \lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2 = \theta,$$

т.е. $Ax = \theta$.

Так как $m\|x\| \le \|Ax\|$, то $\|x\| = 0$, и элемент x – нулевой. В силу этого из способа задания x следует линейность A^{-1}. Проверим ограниченность оператора.

Из условия теоремы $\|Ax\| \ge m \cdot \|x\| \Rightarrow \|x\| \le \frac{1}{m}\|Ax\|$. Если $x = A^{-1}y$, то $\left\|A^{-1}y\right\| \le \frac{1}{m}\left\|AA^{-1}y\right\| = \frac{1}{m}\|y\|$. Обозначив $M = \frac{1}{m}$, получаем условие ограниченности оператора: $\left\|A^{-1}y\right\| \le M\|y\|$. Теорема доказана.

Глава 4. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

4.1. Мера множества по Жордану

Понятие «мера множества» вводится для того, чтобы обобщить понятие длины сегмента или интервала (в одномерном случае), понятие площади, объема (соответственно в двухмерном и трехмерном случаях) на произвольные ограниченные множества.

Пусть на $[a, b]$ задано множество E. Разобьем $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ на частичные сегменты $a_k = [x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Пусть S – сумма длин всех сегментов a_k, целиком содержащихся во множестве E, а S' – сумма длин всех сегментов a_k, содержащих хотя бы одну точку множества E.

Так как сегмент $[a, b]$ можно разбить на частичные сегменты бесконечным числом способов, то суммы S и S' имеют, вообще говоря, бесконечное множество значений. При этом множество $\{S\}$ всех значений суммы S ограничено сверху, а множество $\{S'\}$ всех значений суммы S' ограничено снизу, так как всегда $S \le S'$. Тогда $\{S\}$ имеет точную верхнюю грань, а $\{S'\}$ – точную нижнюю грань, причем первая не больше второй.

Определение. Точная верхняя грань множества всевозможных значений суммы S называется ***нижней мерой*** множества E и обозначается символом $m_*(E)$. Точная нижняя грань множества всевозможных значений суммы S' называется ***верхней мерой*** множества E и обозначается символом $m^*(E)$.

Определение. Если нижняя и верхняя меры множества E совпадают, то множество E называется ***измеримым по Жордану***, а общее значение нижней и верхней меры

$$m(E) = m_*(E) = m^*(E)$$

называется ***мерой множества*** E.

Пример

Пусть E – множество всех рациональных чисел на сегменте $[a, b]$.

Как бы мы ни разбили $[a, b]$ на частичные сегменты a_k, не будет ни одного сегмента, целиком содержащегося в E, поэтому $S = 0$.

В то же время каждый сегмент a_k содержит точки множества E, поэтому $S' = b - a$.`

Таким образом, $m_*(E) = 0$, $m^*(E) = b - a$, и множество E неизмеримо по Жордану.

4.2. Мера множества по Лебегу

Рассмотрим некоторое множество A точек, расположенных на сегменте $[a, b]$. Условимся говорить, что множество B ***покрывает*** множество A, если A есть часть B.

Пусть B – открытое множество (т.е. объединение конечного или счетного множества интервалов), покрывающее данное множество A. Составим сумму S длин интервалов, входящих в B.

Определение. Точная нижняя граница множества сумм $\{S\}$ по всевозможным покрытиям A открытыми множествами называется ***верхней мерой*** A и обозначается $\mu^*(A)$.

Рассмотрим теперь множество A_1 тех точек сегмента $[a, b]$, которые не входят в A (A_1 – так называемое дополнение к A).

Определение. ***Нижней мерой*** $\mu_*(A)$ множества A называется разность

$$\mu_*(A) = b - a - \mu^*(A_1).$$

Можно доказать, что $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$.

Определение. Множество A называется ***измеримым по Лебегу***, если его верхняя и нижняя меры совпадают. Общее значение мер измеримого множества называется его ***лебеговой мерой*** и обозначается μA.

Мера множества обладает рядом свойств, присущих длине, обобщением понятия которых является понятие меры. Так, если два множества не пересекаются (т.е. не имеют общих точек), то мера объединения множеств равна сумме их мер; мера объединения пересекающихся множеств равна сумме их мер минус мера их общей части и т.д.

Существуют множества с мерой, равной нулю. Это, очевидно, те множества, которые можно покрыть открытыми множествами сколь угодно малой меры.

Пример.

Пусть на $[a, b]$ дано счетное множество точек $A = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и каждую точку $x_n \in A$ заключим в интервал $\alpha_n < \dfrac{\varepsilon}{2^n}$. Тогда

$$\mu^*(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \cdot \frac{1/2}{1 - 1/2} = \varepsilon .$$

Таким образом, $0 \le \mu_*(A) \le \mu^*(A) < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число. Следовательно, $\mu_*(A) = \mu^*(A) = \mu A = 0$.

Можно сделать вывод, что любое счетное множество измеримо по Лебегу и его мера равна нулю.

4.3. Интегралы Римана и Лебега

Обратимся теперь к понятию интеграла. Напомним, что по определению, восходящему к Коши и Риману, определенный интеграл рассматривается как предел интегральных сумм, а именно

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k ,$$

где $d = \max \Delta x_k$ $\left(k = \overline{1, n}\right)$. Если n достаточно велико, а d, в свою очередь, достаточно мало, то

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k .$$

Геометрически $f(\xi_k)\Delta x_k$ – площадь прямоугольника, основание которого есть отрезок $[x_{k-1}, x_k]$, а высота – ордината кривой $f(x)$ в произвольно выбранной точке $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Ошибка приближенного равенства невелика, если ордината кривой $y = f(x)$ меняется не слишком быстро.

Однако формула не является надежной, если функция $f(x)$ быстро колеблется, даже если $f(x)$ и непрерывна.

Очевидно, что будут получены различные результаты в зависимости от того, будем ли мы брать в качестве ξ_k точку с наибольшей, наименьшей или некоторой промежуточной ординатой. А для измеримых функций, которые могут быть разрывны в области определения (или же вообще могут быть заданы на абстрактном множестве), римановская конструкция интеграла становится непригодной.

В этом случае целесообразнее вычислять площадь иначе. На оси ординат (рис. 4) откладываем наименьшее и наибольшее значение функции (точнее говоря, точные нижнюю и верхнюю грани значений). Пусть это будут точки α и β. Сегмент $[\alpha, \beta]$ оси ординат разобьем на частичные сегменты $[y_{i-1}, y_i]$ точками $\alpha = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = \beta$. Через точки y_i проведем прямые, параллельные оси абсцисс. Интересующая нас площадь (заштрихованная на рисунке) равна сумме площадей фигур, находящихся в полосе $y_{i-1} \le y \le y_i$.

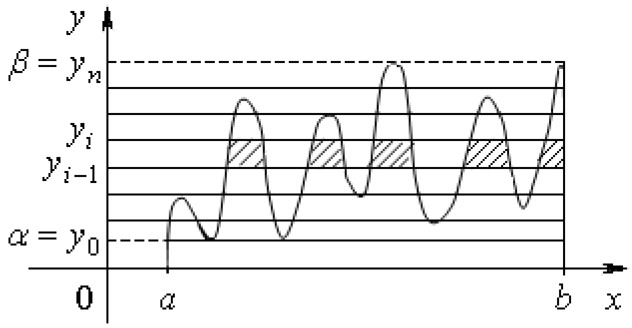

Рисунок 4

В качестве основания каждого из «прямоугольников» будем брать длину верхнего основания, т.е. длину отрезка, состоящего из точек x таких, что $f(x) \ge y_i$. Тогда сумма длин всех таких оснований для данной горизонтальной полосы представляет собой меру множества, состоящего из таких значений x, для которых $f(x) \ge y_i$.

Примечание. Мы предполагаем измеримость этого множества при любом значении y_i. При этом, если все такие множества измеримы, то сама функция $f(x)$ также называется ***измеримой***. Далее будем рассматривать только измеримые функции.

Обозначим указанную меру через μ_k. Тогда площадь заштрихованной на рисунке части фигуры, заключенной в полосе $y_{i-1} \le y \le y_i$, приближенно равна $\mu_i \Delta y_i$, а площадь всей фигуры, ограниченной кривой, приблизительно равна $\mu_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \Delta y_i$, где μ_0 – мера всего множества точек, для которых $f(x) \geq y_0$. Интересно отметить, что точность этого приближенного равенства мало зависит от того, будет ли функция $f(x)$ непрерывной или разрывной, если только она остается ограниченной.

Обобщая это построение на случай функций, не обязательно непрерывных, мы приходим к следующему определению.

Определение. ***Интегралом Лебега*** ограниченной функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ называется предел

$$\lim_{d \to 0} \left(\mu_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \Delta y_i \right),$$

где μ_i – мера множества значений x, для которых $f(x) \geq y_i$, а $\alpha = y_0$ и $\beta = y_n$ – числа, между которыми заключены все значения $f(x)$.

Можно доказать, что интеграл Лебега от ограниченной измеримой функции всегда существует. При этом, если существует определенный интеграл функции $f(x)$ в обычном (римановом) смысле, то он совпадает с лебеговым интегралом. Поэтому нет нужды в особом символе для обозначения интеграла Лебега, и мы будем пользоваться стандартным обозначением $\int_a^b f(x)dx$.

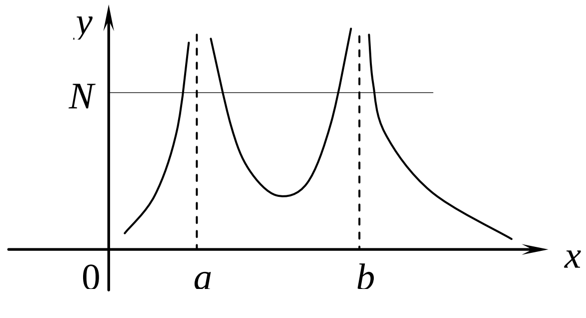

Рисунок 5

Дадим теперь определение лебегова интеграла от неограниченной функции.

Пусть функция $f(x)$ неотрицательная. Введем новую функцию

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \leq N \\ N, & \text{если } f(x) > N \end{cases}$$

(здесь N – произвольное положительное число). Функция $f_N(x)$ ограничена (рис.5), так как $0 \leq f_N(x) \leq N$, поэтому ее лебегов интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует. С возрастанием N этот интеграл не убывает и потому стремится при безграничном возрастании N к определенному конечному или бесконечному пределу.

Определение. Если существует конечный $\lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_a^b f_N(x)dx$, то этот предел называется ***лебеговым интегралом неограниченной неотрицательной функции*** $f(x)$.

Таким образом, по определению, если функция $f(x)\geq 0$ и неограничена, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{N\to\infty}\int\limits_a^b f_N(x)dx.$$

Определение. Неограниченная неотрицательная функция, для которой существует интеграл Лебега по отрезку $[a,b]$, называется ***суммируемой*** на $[a,b]$.

Аналогично определяется функция, суммируемая в m-мерной $(m\geq 2)$ области.

Пусть теперь $f(x)$ может иметь какой угодно знак. Представим ее как разность двух неотрицательных функций: $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$, где $f_1(x)=\dfrac{|f(x)|+f(x)}{2}$, $f_2(x)=\dfrac{|f(x)|-f(x)}{2}$.

Будем считать, что каждая из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ суммируема, и в этом случае положим по определению

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b f_1(x)dx-\int\limits_a^b f_2(x)dx,$$

т.е. $f(x)$ – суммируема.

Но если суммируема $f(x)$, то суммируема также и функция

$$|f(x)|=f_1(x)+f_2(x).$$

Таким образом, интеграл Лебега всегда абсолютно сходящийся.

Если функция $f(x)$ – комплексная, $f(x)=\varphi(x)+i\psi(x)$, то мы полагаем

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b \varphi(x)dx+i\int\limits_a^b \psi(x)dx.$$

По определению интеграл слева существует тогда и только тогда, когда существуют оба интеграла справа. Интеграл Лебега от комплексной функции также абсолютно сходящийся.

Основные свойства интеграла Римана остаются в силе и для интеграла Лебега. Отметим также три важных свойства, характерных для интеграла Лебега.

1. Значение интеграла Лебега не изменится, если изменить значение подынтегральной функции на множество меры нуль. Более того, лебегов интеграл сохраняет смысл, если на множестве меры нуль значения функции остаются неопределенными.

Как следствие, отсюда вытекает, что лебегов интеграл равен нулю, если подынтегральная функция почти везде равна нулю.

2. Если интеграл Лебега от неотрицательной функции равен нулю, то эта функция равна нулю почти везде.

3. Если $|f(x)| \le \varphi(x)$ и $\varphi(x)$ суммируема, то $f(x)$ также суммируема.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1
Неравенство Гельдера

Неравенство Гельдера имеет вид:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}}, \tag{1}$$

где $p>1, q>1$ связаны условием $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, т.е. $q=\frac{p}{p-1}$.

Заметим, что неравенство (1) однородно, т.е. если оно выполнено для каких-либо векторов $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ и $b=(b_1,b_2,...,b_n)$, то оно выполнено и для любых векторов $\lambda a,\ \mu b$.

Действительно, умножив (1) на $|\lambda\mu|$, получим:

$$|\lambda\mu|\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \le |\lambda|\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot |\mu|\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

или

$$\sum_{k=1}^{n}|\lambda a_k \cdot \mu b_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}|\mu b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Поэтому неравенство (1) достаточно доказать для случая

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p = \sum_{k=1}^{n}|b_k|^q = 1. \tag{2}$$

Итак, пусть выполнено (2). Докажем, что

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} = 1. \tag{3}$$

Рассмотрим на плоскости (ξ,η) кривую, определяемую уравнением $\eta=\xi^{p-1}$ или, что то же самое, $\xi=\eta^{q-1}$.

Продолжение приложения 1

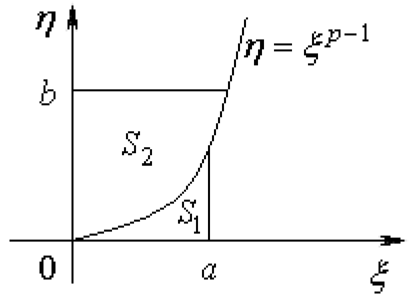

Рисунок П 1

Из рисунка П.1 ясно, что $\forall a,b>0 \Rightarrow S_1+S_2 \ge ab$. Вычислим площади S_1 и S_2. $S_1=\int\limits_0^a \xi^{p-1}d\xi=\dfrac{a^p}{p}$, $S_2=\int\limits_0^b \eta^{q-1}d\eta=\dfrac{b^q}{q}$.

Таким образом, справедливо неравенство Юнга $ab\le\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}$. Заменив a на $|a_k|$и b на $|b_k|$ и суммируя полученные выражения от 1 до n, получим

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k||b_k|\le\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{|a_k|^p}{p}+\frac{|b_k|^q}{q}\right)=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \text{ или } \sum_{k=1}^{n}|a_kb_k| \le 1.$$

Т.е. (3) доказано, а следовательно, и (1) справедливо.

Неравенство Минковского

Рассмотрим тождество

$$(|a|+|b|)^p=(|a|+|b|)^{p-1}(|a|+|b|)=(|a|+|b|)^{p-1}|a|+(|a|+|b|)^{p-1}|b|.$$

Заменяя a на a_kи b на b_k и суммируя по k от 1 до n, получим

$$\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p=\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^{p-1}|a_k|+\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^{p-1}|b_k|.$$

Применяя теперь к каждой из двух сумм, стоящих справа, неравенство Гельдера и учитывая, что $(p-1)q=p$, получим

$$\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p\le\left(\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

Деля обе части этого неравенства на $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p\right)^{\frac{1}{q}}$, получим неравенство Минковского:

Продолжение приложения 1

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

Интегральная форма неравенств Гельдера и Минковского

Интегральное неравенство Гельдера имеет следующий вид

$$\boxed{\int_c^d|x(t)y(t)|dt\le\left(\int_c^d|x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_c^d|y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

Если в неравенстве Юнга в качестве величин a и b взять соответственно

$$a=\frac{|x(t)|}{\left(\int_c^d|x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}};\ b=\frac{|y(t)|}{\left(\int_c^d|y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}},$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – интегрируемые на промежутке $[c,d]$ функции, то неравенство примет вид

$$\frac{|x(t)|\cdot|y(t)|}{\left(\int_c^d|x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_c^d|y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}}\le\frac{|x(t)|^p}{p\int_c^d|x(t)|^p dt}+\frac{|y(t)|^q}{q\int_c^d|y(t)|^q dt}.$$

Проинтегрируем последнее неравенство на промежутке $[c,d]$, тогда получим

$$\frac{\int_c^d|x(t)|\cdot|y(t)|dt}{\left(\int_c^d|x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_c^d|y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}}\le\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

или
$$\int_a^b|x(t)|\cdot|y(t)|dt\le\left(\int_a^b|x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Окончание приложения 1

Полученное неравенство есть неравенство Гельдера для интегралов. В частном случае при $p = q = 2$ оно обращается в неравенство Коши – Буняковского:

$$\int_a^b |x(t)y(t)|dt \le \left(\int_a^b x^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b y^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогично можно получить неравенство Минковского в интегральной форме:

$$\boxed{\left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

Приложение 2
Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Пусть в пространстве H задана конечная или счетная система линейно независимых элементов $p_1, p_2, ..., p_n, ...$ Требуется построить ортонормированную систему элементов $\{e_k\}$.

Первый шаг. Положим $e_1 = \dfrac{p_1}{\|p_1\|}$.

Второй шаг. Построим вспомогательный элемент $q_2 = p_2 - \alpha_{21} e_1$ и потребуем, чтобы $(q_2, e_1) = 0$. Тогда

$$(q_2, e_1) = (p_2 - \alpha_{21} e_1, e_1) = (p_2, e_1) - \alpha_{21} = 0,$$

т.е. $\alpha_{21} = (p_2, e_1)$ и $q_2 = p_2 - (p_2, e_1) e_1$.

Положим $e_2 = \dfrac{q_2}{\|q_2\|}$. При этом $\|q_2\| \neq 0$, иначе было бы $q_2 = 0$ и $p_2 = \alpha_{21} e_1 = \alpha_{21} \dfrac{p_1}{\|p_1\|}$, т.е. p_1 и p_2 были бы линейно зависимыми, что противоречит постановке задачи.

Третий шаг. Пусть элементы $e_1, e_2, ..., e_{k-1}$ уже построены. Положим $q_k = p_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \alpha_{ki} e_i$ и потребуем, чтобы $(q_k, e_m) = 0$ для $\forall m = \left(\overline{1, k-1}\right)$. Тогда

$$(q_k, e_m) = \left(p_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{ki} e_i, e_m \right) = (p_k, e_m) - \alpha_{km} = 0,$$

т.е. $\alpha_{km} = (p_k, e_m)$ и $q_k = p_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} (p_k, e_i) e_i$.

Положим $e_k = \dfrac{q_k}{\|q_k\|}$, причем $\|q_k\| \neq 0$.

Таким образом, построена ортонормированная система $\{e_k\}$.

Список литературы

1. Люстерник М.Л. Элементы функционального анализа / М.Л. Люстерник, В.И. Соболев. – М. : Наука, 1965.

2. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М. : Наука, 1968.

3. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика / Л. Коллатц. – М. : Мир, 1969.

4. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ / Б.З. Вулих. – М. : Наука, 1967.

5. Рудин У. Функциональный анализ / У. Рудин; пер. с англ. – М. : Мир, 1975.

6. Краснов М.Л. Интегральные уравнения / М.Л. Краснов. – М. : Наука, 1967.

7. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений / И.Г. Петровский. – М. : Наука, 1965.

Содержание

Навчально-методичне видання

КУРПА Лідія Василівна
ЛІННІК Ганна Борисівна
ЩЕРБІНІНА Тетяна Євгенівна

ВСТУП ДО ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Навчальний посібник
для студентів технічних університетів

Російською мовою

Роботу до видання рекомендував проф. Д.В. Бреславський
Редактор Н.В. Верстюк

План 2013 р., поз. 70

Підп. до друку __.__.__.   Формат 6(· 1/16.   Папір друк. №2.
Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк.
Наклад 100 прим. Зам №_____. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.

Друкарня НТУ «ХПІ». 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21